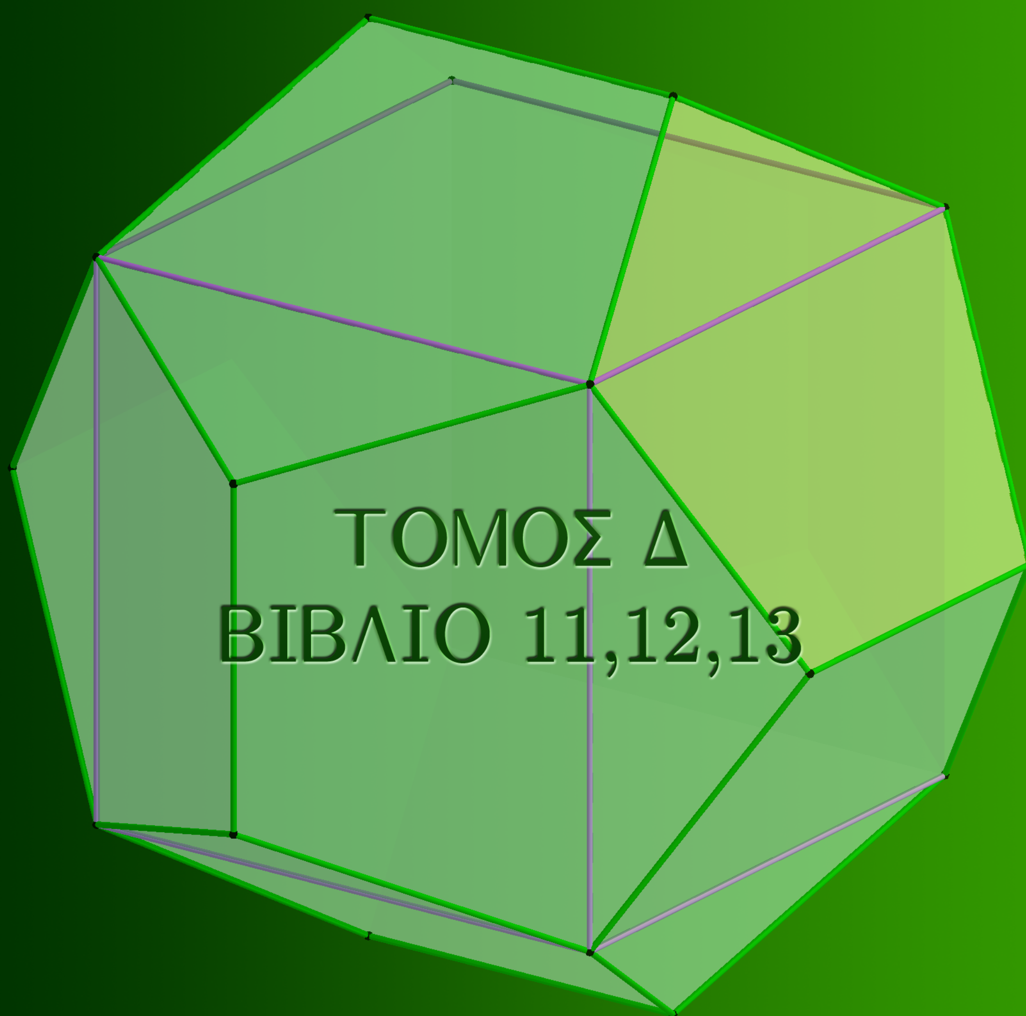
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τ Ο Μ Ο Σ   Δ
Β Ι Β Λ Ι Α   11, 12, 13

Αρχαίο κείμενο Ε.Σ.ΣΤΑΜΑΤΗ
Υπό
ΝΙΚΟΛΑΟΥ Λ. ΚΕΧΡΗ
(Αθήνα, Νοέμβριος 2016)

ISBN 978-618-83039-3-5
ISBN 978-618-83039-4-2 (set)
Εκδότης Νικόλαος Κεχρής

Πρόλογος

Στα βιβλία των Στοιχείων 11, 12 και 13, ο Ευκλείδης καταχωρεί προτάσεις που σχετίζονται με τη Γεωμετρία του χώρου. Θεμελιώνει θα λέγαμε τον κλάδο της Γεωμετρίας που σήμερα αποκαλούμε Στερεομετρία. Με την απαράμιλλη συνθετική μεθοδολογία του, θέτει όρους και βάσει αυτών προχωρά σταδιακά από αποδείξεις απλών αρχικά προτάσεων σε δυσκολότερες αποδείξεις για να φτάσει τελικά στο 13ο βιβλίο όπου και θα δώσει την κατασκευή και εγγραφή στη σφαίρα όλων των κυρτών κανονικών πολυέδρων. Κλείνει δε, με την απόδειξη ότι τα κατασκευασθέντα πολύεδρα είναι μοναδικά προσδίδοντας έτσι στη θεωρία των Στοιχείων μια ξεχωριστή ολοκλήρωση.

Τα κυρτά κανονικά πολύεδρα είναι πέντε. Με τη σειρά που ο Ευκλείδης τα κατασκευάζει είναι: το τετράεδρο, το οκτάεδρο, ο κύβος, το εικοσάεδρο και το δωδεκάεδρο. Η σειρά κατασκευής δικαιολογείται με βάση τον αριθμό των κορυφών του πολυέδρου. Τα πέντε αυτά κανονικά πολύεδρα, σήμερα είναι γνωστά με τον όρο “Πλατωνικά στερεά” επειδή ο Πλάτων τα χρησιμοποιεί στο διάλογό του “Τίμαιος” ως δομικά υλικά για τη δημιουργία του κόσμου. Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει μερικές ιδιότητες αυτών των στερεών:

Στερεό	Κορυφές	Ακμές	Έδρες	Αντιστοιχία
Τετράεδρο	4	6	4	Φωτιά
Οκτάεδρο	6	12	8	Αέρας
Κύβος	8	12	6	Γη
Εικοσάεδρο	12	30	20	Νερό
Δωδεκάεδρο	20	30	12	Αιθέρας

Σχετικά με τη δική μου προσπάθεια ήθελα τέλος να παρατηρήσω ότι σε μερικά από τα σχήματα προσέθεσα ένα βαθμό ελευθερίας, αυτόν της οπτικής γωνίας. Η ανάγκη αυτή παρουσιάστηκε σε πολύπλοκα σχήματα όπου η ευκρίνεια παίζει καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση τους. Άλλωστε, απώτερος σκοπός αυτής της προσπάθειας είναι να βοηθήσει τον μελετητή να κατανοήσει και να εμβαθύνει στη διδασκαλία του Ευκλείδη.

Αθήνα, Νοέμβριος 2016
Νικόλαος Κεχρής

Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Α

Β Ι Β Λ Ι Ο 11

Ὅροι

αʹ. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

βʹ. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

γʹ. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δʹ. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

εʹ. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ϛʹ. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζʹ. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

ηʹ. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θʹ. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ιʹ. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ιαʹ. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ἄλλως· στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβʹ. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

ιγʹ. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδʹ. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ιε΄. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ις΄. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾿ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη΄. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιθ΄. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ΄. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα΄. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ΄. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ΄. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ΄. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

κε΄. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κς΄. Ὀκτάεδρόν ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

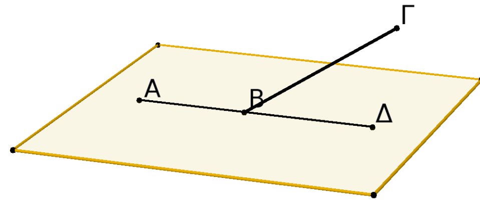
κζ΄. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. κη΄. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

α′.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς **ΑΒΓ** μέρος μέν τι τὸ **ΑΒ** ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ **ΒΓ** ἐν μετεωροτέρῳ.

Ἔσται δή τις τῇ **ΑΒ** συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ **ΒΔ**· δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν **ΑΒΓ**, **ΑΒΔ** κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ **ΑΒ**· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ **Β** καὶ διαστήματι τῷ **ΑΒ** κύκλον γράψωμεν, αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήψονται τοῦ κύκλου περιφερείας.

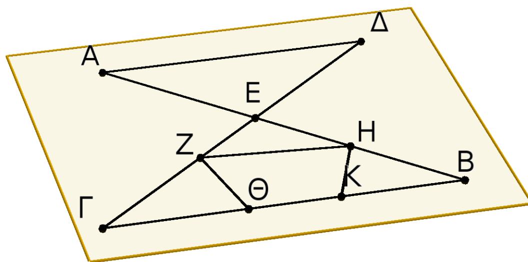


Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν μετεωροτέρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον. λέγω, ὅτι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν **ΕΓ**, **ΕΒ** τυχόντα σημεῖα τὰ **Ζ**, **Η**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΓΒ**, **ΖΗ**, καὶ διήχθωσαν αἱ **ΖΘ**, **ΗΚ**· λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ **ΕΓΒ** τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

εἰ γάρ ἐστι τοῦ **ΕΓΒ** τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ **ΖΘΓ** ἢ τὸ **ΗΒΚ** ἐν τῷ ὑποκειμένῳ [ἐπιπέδῳ], τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν **ΕΓ**, **ΕΒ** εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν αλλῳ. εἰ δὲ τοῦ **ΕΓΒ** τριγώνου τὸ **ΖΓΒΗ** μέρος ᾖ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν **ΕΓ**, **ΕΒ** εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη.

τὸ ἄρα **ΕΓΒ** τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ **ΕΓΒ** τρίγωνον,

ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν **ΕΓ**, **ΕΒ**, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν **ΕΓ**, **ΕΒ**, ἐν τούτῳ καὶ αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**. αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τεμνῇ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ **ΑΒ**, **ΒΓ** τεμνέτω ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ **ΔΒ** γραμμή· λέγω, ὅτι ἡ **ΔΒ** γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ **Δ** ἐπὶ τὸ **Β** ἐν μὲν τῷ **ΑΒ** ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ **ΔΕΒ**, ἐν δὲ τῷ **ΒΓ** ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ **ΔΖΒ**. ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν **ΔΕΒ**, **ΔΖΒ** τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον· ὅπερ ἄτοπον. οὔκ ἄρα αἱ **ΔΕΒ**, **ΔΖΒ** εὐθεῖαί εἰσιν.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ **Δ** ἐπὶ τὸ **Β** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσται πλὴν τῆς **ΔΒ** κοινῆς τομῆς τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΕΖ** δύο εὐθείαις ταῖς **ΑΒ**, **ΓΔ** τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ **Ε** σημεῖον ἀπὸ τοῦ **Ε** πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι ἡ **ΕΖ** καὶ τῷ διὰ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΓΕ**, **ΕΔ** ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ **Ε**, ὡς ἔτυχεν, ἡ **ΗΕΘ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΔ**, **ΓΒ**, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ **Ζ** ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΑ**, **ΖΗ**, **ΖΔ**, **ΖΓ**, **ΖΘ**, **ΖΒ**.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΑΕ**, **ΕΔ** δυσὶ ταῖς **ΓΕ**, **ΕΒ** ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας

περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ **ΑΔ** βάσει τῇ **ΓΒ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΕΔ** τρίγωνον τῷ **ΓΕΒ** τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΔΑΕ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΒΓ** ἴση [ἐστίν]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΕΗ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΒΕΘ** ἴση.

δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΑΗΕ**, **ΒΕΘ** τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν **ΑΕ** τῇ **ΕΒ**· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν **ΗΕ** τῇ **ΕΘ**, ἡ δὲ **ΑΗ** τῇ **ΒΘ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΕ** τῇ **ΕΒ**, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΖΕ**, βάσις ἄρα ἡ **ΖΑ** βάσει τῇ **ΖΒ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΖΓ** τῇ **ΖΔ** ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΓΒ**, ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΖΑ** τῇ **ΖΒ** ἴση, δύο δὴ αἱ **ΖΑ**, **ΑΔ** δυσὶ ταῖς **ΖΒ**, **ΒΓ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ **ΖΔ** βάσει τῇ **ΖΓ** ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΑΔ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΖΒΓ** ἴση ἐστίν.

καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ **ΑΗ** τῇ **ΒΘ** ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ **ΖΑ** τῇ **ΖΒ** ἴση, δύο δὴ αἱ **ΖΑ**, **ΑΗ** δυσὶ ταῖς **ΖΒ**, **ΒΘ** ἴσαι εἰσίν. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΖΑΗ** ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ **ΖΒΘ**· βάσις ἄρα ἡ **ΖΗ** βάσει τῇ **ΖΘ** ἐστιν ἴση.

καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ **ΗΕ** τῇ **ΕΘ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΕΖ**, δύο δὴ αἱ **ΗΕ**, **ΕΖ** δυσὶ ταῖς **ΘΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ **ΖΗ** βάσει τῇ **ΖΘ** ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΗΕΖ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΘΕΖ** ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΗΕΖ**, **ΘΕΖ** γωνιῶν. ἡ **ΖΕ** ἄρα πρὸς τὴν **ΗΘ** τυχόντως διὰ τοῦ **Ε** ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ **ΖΕ** καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας· ἡ **ΖΕ** ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθειῶν. ἡ **ΖΕ** ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἐπιπέδῳ.

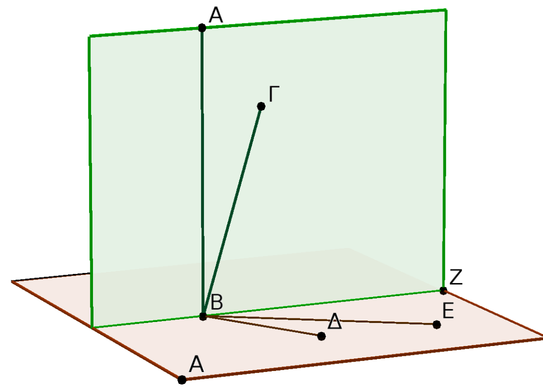
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τρισὶν εὐθείαις ταῖς **ΒΓ**, **ΒΔ**, **ΒΕ** πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ **Β** ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι αἱ **ΒΓ**, **ΒΔ**, **ΒΕ** ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν **ΒΔ**, **ΒΕ** ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ **ΒΓ** ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ δὶα τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν **ΒΖ**.



ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΒΖ**. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΑΒ** ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν **ΒΔ**, **ΒΕ**, καὶ τῷ διὰ τῶν **ΒΔ**, **ΒΕ** ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ **ΑΒ**.

τὸ δὲ διὰ τῶν **ΒΔ**, **ΒΕ** ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ **ΑΒ** ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ **ΑΒ**.

ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ **ΒΖ** οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΖ** γωνία ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΖ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ**. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ **ΒΓ** εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΒΓ**, **ΒΔ**, **ΒΕ** ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

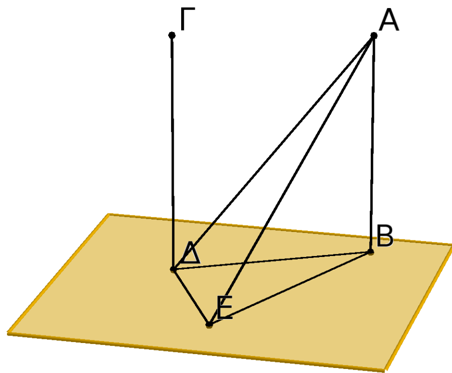
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς ἁφῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛʹ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ **Β**, **Δ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΔ** εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ **ΒΔ** πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ **ΔΕ**, καὶ κείσθω τῇ **ΑΒ** ἴση ἡ **ΔΕ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΕ**, **ΑΕ**, **ΑΔ**.



Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΑΒ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας [ἄρα] τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς **ΑΒ** ἑκατέρα τῶν **ΒΔ**, **ΒΕ** οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΑΒΔ**, **ΑΒΕ** γωνιῶν.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΓΔΒ**, **ΓΔΕ** ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΒΔ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΔ** δυσὶ ταῖς **ΕΔ**, **ΔΒ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ **ΑΔ** βάσει τῇ **ΒΕ** ἐστιν ἴση.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, ἀλλὰ καὶ ἡ **ΑΔ** τῇ **ΒΕ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΕ** δυσὶ ταῖς **ΕΔ**, **ΔΑ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ **ΑΕ**· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** γωνιᾴ τῇ ὑπὸ **ΕΔΑ** ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΔΑ**· ἡ **ΕΔ** ἄρα πρὸς τὴν **ΔΑ** ὀρθή ἐστιν.

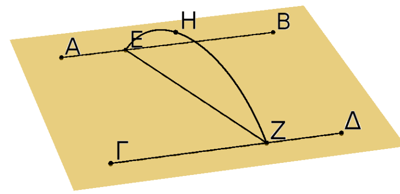
ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν **ΒΔ**, **ΔΓ** ὀρθή. ἡ **ΕΔ** ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς **ΒΔ**, **ΔΑ**, **ΔΓ** πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἁφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΒΔ**, **ΔΑ**, **ΔΓ** ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ **ΔΒ**, **ΔΑ**, ἐν τούτῳ καὶ ἡ **ΑΒ**· πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα **ΑΒ**, **ΒΔ**, **ΔΓ** εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΑΒΔ**, **ΒΔΓ** γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφʼ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, καὶ εἰλήφθω ἐφʼ ἑκατέρας αὐτῶν τυνχόντα σημεῖα τὰ **Ε**, **Ζ**· λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ **Ε**, **Ζ** σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.



Μὴ γάρ, ἀλλʼ εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ **ΕΗΖ**, καὶ διήχθω διὰ τῆς **ΕΗΖ** ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν **ΕΖ**· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ **ΕΗΖ**, **ΕΖ** χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ **Ε** ἐπὶ τὸ **Ζ** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖαι ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν **ΑΒ**, **ΓΒ** ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ **Ε** ἐπὶ τὸ **Ζ** ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφʼ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ηʹ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ **ΑΒ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ **ΓΔ** τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ **Β**, **Δ** σημεῖα, καὶ ἐπεζέυχθω ἡ **ΒΔ**· αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, **ΒΔ** ἄρα ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ **ΒΑ** πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ **ΔΕ**, καὶ κείσθω τῇ **ΑΒ** ἴση ἡ **ΔΕ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΕ**, **ΑΕ**, **ΑΔ**.

Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΑΒ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ **ΑΒ**· ὀρθὴ ἄρα [ἐστὶν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΑΒΔ**, **ΑΒΕ** γωνιῶν.

καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς **ΑΒ**, **ΓΔ** εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ **ΒΔ**, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΔ**, **ΓΔΒ** γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΔΒ**· ἡ **ΓΔ** ἄρα πρὸς τὴν **ΒΔ** ὀρθή ἐστιν.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΒΔ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΔ** δυσὶ ταῖς **ΕΔ**, **ΔΒ** ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΔ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΒ** ἴση· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ **ΑΔ** βάσει τῇ **ΒΕ** ἴση.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, ἡ δὲ **ΒΕ** τῇ **ΑΔ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΕ** δυσὶ ταῖς **ΕΔ**, **ΔΑ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ **ΑΕ**· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΑ** ἐστιν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΔΑ**· ἡ **ΕΔ** ἄρα πρὸς τὴν **ΑΔ** ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν **ΔΒ** ὀρθή· ἡ **ΕΔ** ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν **ΒΔ**, **ΔΑ** ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν **ΒΔΑ** ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ **ΕΔ**.

ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν **ΒΔΑ** ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ **ΔΓ**, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν **ΒΔΑ** ἐπιπέδῳ ἐστὶν αἱ **ΑΒ**, **ΒΔ**, ἐν ᾧ δὲ αἱ **ΑΒ**, **ΒΔ**, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ **ΔΓ**. ἡ **ΕΔ** ἄρα τῇ **ΔΓ** πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ **ΓΔ** τῇ **ΔΕ** πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΓΔ** τῇ **ΒΔ** πρὸς ὀρθάς. ἡ **ΓΔ** ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς **ΔΕ**, **ΔΒ** ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ **Δ** τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε ἡ **ΓΔ** καὶ τῷ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΔΒ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΔΒ** ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ **ΓΔ** ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

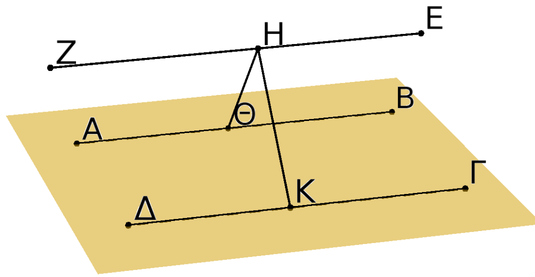
Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** τῇ **ΕΖ** παράλληλος μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς **ΕΖ** τυχὸν σημεῖον τὸ **Η**, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ **ΕΖ** ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν **ΕΖ**, **ΑΒ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΗΘ**, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν **ΖΕ**, **ΓΔ** τῇ **ΕΖ** πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΗΚ**.



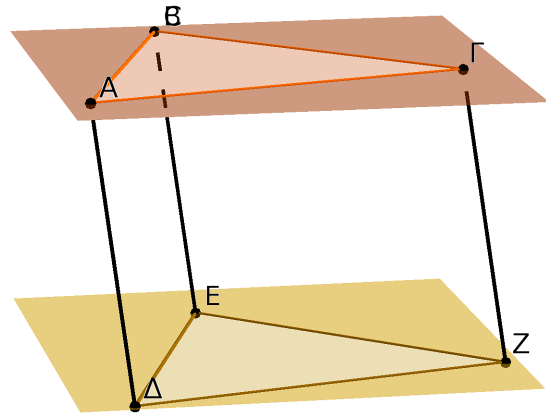
Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΕΖ** πρὸς ἑκατέραν τῶν **ΗΘ**, **ΗΚ** ὀρθή ἐστιν, ἡ **ΕΖ** ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν **ΗΘ**, **ΗΚ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν ἡ **ΕΖ** τῇ **ΑΒ** παράλληλος· καὶ ἡ **ΑΒ** ἄρα τῷ διὰ τῶν **ΘΗΚ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΓΔ** τῷ διὰ τῶν **ΘΗΚ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** τῷ διὰ τῶν **ΘΗΚ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΓΔ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς **ΔΕ**, **ΕΖ** ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ**.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ **ΒΑ**, **ΒΓ**, **ΕΔ**, **ΕΖ** ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΔ**, **ΓΖ**, **ΒΕ**, **ΑΓ**, **ΔΖ**.

Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΒΑ** τῇ **ΕΔ** ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ **ΑΔ** ἄρα τῇ **ΒΕ** ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΓΖ** τῇ **ΒΕ** ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΑΔ**, **ΓΖ** τῇ **ΒΕ** ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος.

αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΓΖ** καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ **ΑΓ**, **ΔΖ**· καὶ ἡ **ΑΓ** ἄρα τῇ **ΔΖ** ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος.

καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δυσὶ ταῖς **ΔΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ **ΑΓ** βάσει τῇ **ΔΖ** ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας

ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ **Α**, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ **ΒΓ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου ἐπὶ τὴν **ΒΓ** κάθετος ἡ **ΑΔ**. εἰ μὲν οὖν ἡ **ΑΔ** κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου τῇ **ΒΓ** ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΔΕ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Α** ἐπὶ τὴν **ΔΕ** κάθετος ἡ **ΑΖ**, καὶ διὰ τοῦ **Ζ** σημείου τῇ **ΒΓ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΗΘ**.

Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΒΓ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΔΑ**, **ΔΕ** πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ **ΒΓ** ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν **ΕΔΑ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καί ἐστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ **ΗΘ**· ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ **ΗΘ** ἄρα τῷ διὰ τῶν **ΕΔ**, **ΔΑ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

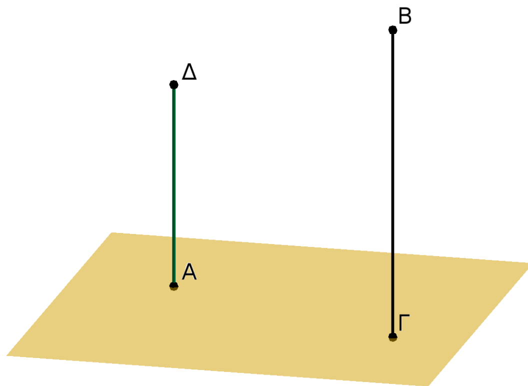
καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν **ΕΔ**, **ΔΑ** ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ **ΗΘ**. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ **ΑΖ** οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν **ΕΔ**, **ΔΑ** ἐπιπέδῳ· ἡ **ΗΘ** ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν **ΖΑ**· ὥστε καὶ ἡ **ΖΑ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν **ΘΗ**.

ἔστι δὲ ἡ **ΑΖ** καὶ πρὸς τὴν **ΔΕ** ὀρθή· ἡ **ΑΖ** ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν **ΗΘ**, **ΔΕ** ὀρθή ἐστιν. ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι᾿ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ **ΖΑ** ἄρα τῷ διὰ τῶν **ΕΔ**, **ΗΘ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν **ΕΔ**, **ΗΘ** ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ **ΑΖ** ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετεώρου τοῦ **Α** ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ **ΑΖ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ′.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ **Α**· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.



Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ **Β**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Β** ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ **ΒΓ**, καὶ διὰ τοῦ **Α** σημείου τῇ **ΒΓ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΑΔ**.

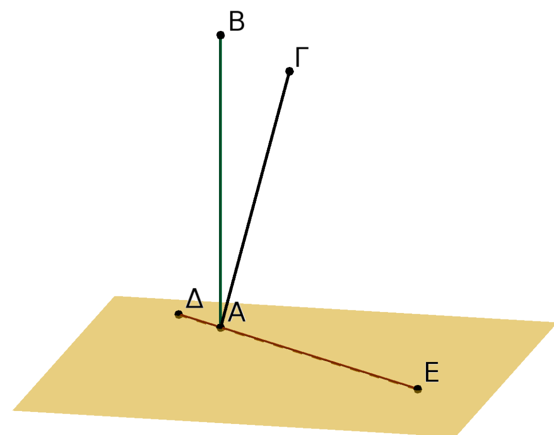
Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ **ΑΔ**, **ΓΒ**, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ **ΒΓ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ **ΑΔ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστιν.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ **Α** πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ **ΑΔ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ′.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ **Α** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** ἐπὶπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ **Α** ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν.



ποιείτω τὴν **ΔΑΕ**· αἱ ἄρα **ΑΒ**, **ΑΓ**, **ΔΑΕ** εὐθεῖαι ἐν ἑνι εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΓΑ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας.

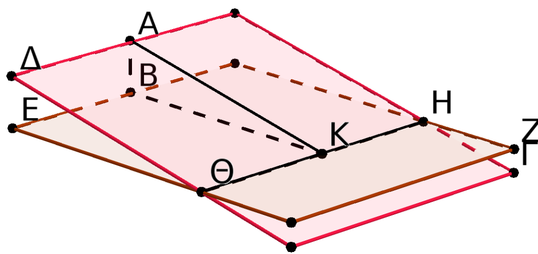
ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ **ΔΑΕ** οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΓΑΕ** γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ** ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΓΑΕ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΕ** καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** πρὸς ἑκάτερον τῶν **ΓΔ**, **ΕΖ** ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.



Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. ποιείτωσαν τὴν **ΗΘ**, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς **ΗΘ** τυχὸν σημεῖον τὸ **Κ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΚ**, **ΒΚ**.

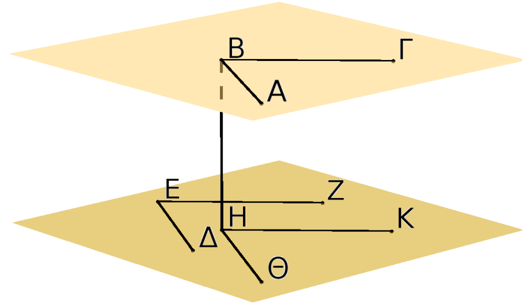
Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΑΒ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ **ΕΖ** ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν **ΒΚ** ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ **ΕΖ** ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ **ΑΒ**· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΚ** γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΚ** ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ **ΑΒΚ** αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΒΚ**, **ΒΑΚ** δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ **ΓΔ**, **ΕΖ** ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ **ΓΔ**, **ΕΖ** ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιεʹ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς **ΔΕ**, **ΕΖ** ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΔΕ**, **ΕΖ** ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Β** σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ἐπίπεδον κάθετος ἡ **ΒΗ** καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ **Η** σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ **Η** τῇ μὲν **ΕΔ** παράλληλος ἤχθω ἡ **ΗΘ**, τῇ δὲ **ΕΖ** ἡ **ΗΚ**.

Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΒΗ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν **ΗΘ**, **ΗΚ** οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΒΗΘ**, **ΒΗΚ** γωνιῶν.

καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΒΑ** τῇ **ΗΘ**, αἱ ἄρα ὑπὸ **ΗΒΑ**, **ΒΗΘ** γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ **ΒΗΘ**· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΗΒΑ**· ἡ **ΗΒ** ἄρα τῇ **ΒΑ** πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ **ΗΒ** καὶ τῇ **ΒΓ** ἐστι πρὸς ὀρθάς.

ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ **ΗΒ** δυσὶν εὐθείαις ταῖς **ΒΑ**, **ΒΓ** τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ **ΗΒ** ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν **ΒΑ**, **ΒΓ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. [διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ **ΒΗ** καὶ τῷ διὰ τῶν **ΗΘ**, **ΗΚ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν **ΗΘ**, **ΗΚ** ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ**· ἡ **ΒΗ** ἄρα τῷ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ** ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ **ΗΒ** καὶ τῷ διὰ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς]. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν **ΔΕ**, **ΕΖ**.

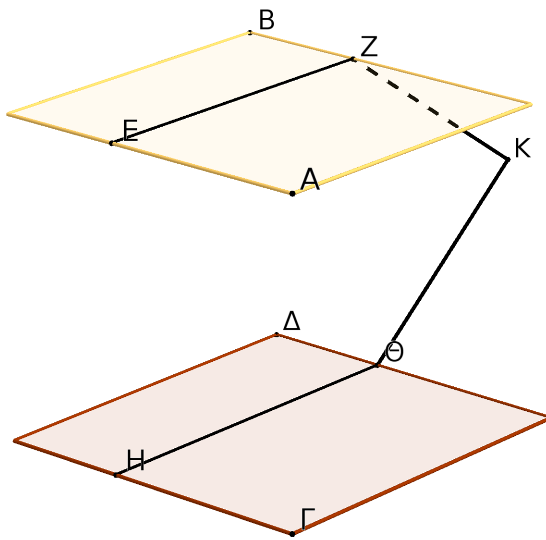
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ** ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ **ΕΖΗΘ** τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ **ΕΖ**, **ΗΘ**· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ **ΕΖ** τῇ **ΗΘ**.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ **ΕΖ**, **ΗΘ** ἤτοι ἐπὶ τὰ **Ζ**, **Θ** μέρη ἢ ἐπὶ τὰ **Ε**, **Η** συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ **Ζ**, **Θ** μέρη καὶ συμπιπτέτωσαν πρότερον κατὰ τὸ **Κ**.



καὶ ἐπεὶ ἡ **ΕΖΚ** ἐν τῷ **ΑΒ** ἐστιν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς **ΕΖΚ** σημεῖα ἐν τῷ **ΑΒ** ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς **ΕΖΚ** εὐθείας σημείων ἐστὶ τὸ **Κ**· τὸ **Κ** ἄρα ἐν τῷ **ΑΒ** ἐστιν ἐπιπέδῳ.

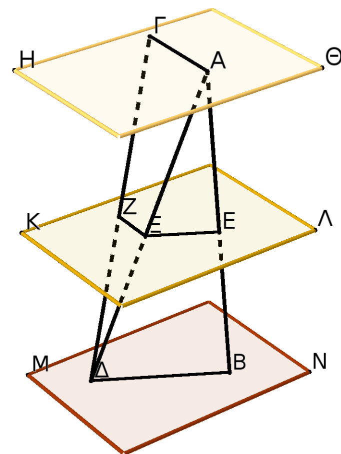
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ **Κ** καὶ ἐν τῷ **ΓΔ** ἐστιν ἐπιπέδῳ· τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ** ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ **ΕΖ**, **ΗΘ** εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ **Ζ**, **Θ** μέρη συμπεσοῦνται.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ **ΕΖ**, **ΗΘ** εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ **Ε**, **Η** μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΕΖ** τῇ **ΗΘ**. Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζʹ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπεδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ** ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν **ΗΘ**, **ΚΛ**, **ΜΝ** τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ **Α**, **Ε**, **Β**, **Γ**, **Ζ**, **Δ** σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΕ** εὐθεῖα πρὸς τὴν **ΕΒ**, οὕτως ἡ **ΓΖ** πρὸς τὴν **ΖΔ**.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΑΓ**, **ΒΔ**, **ΑΔ**, καὶ συμβαλλέτω ἡ **ΑΔ** τῷ **ΚΛ** ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΞ**, **ΞΖ**.

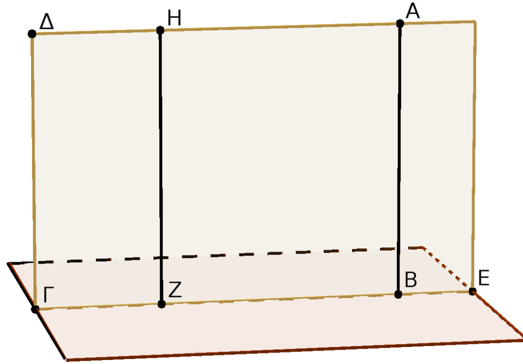
Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ **ΚΛ**, **ΜΝ** ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ **ΕΒΔΞ** τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ **ΕΞ**, **ΒΔ** παράλληλοί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ **ΗΘ**, **ΚΛ** ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ **ΑΞΖΓ** τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ **ΑΓ**, **ΞΖ** παράλληλοί εἰσιν.

καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΑΒΔ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΒΔ** εὐθεῖα ἦκται ἡ **ΕΞ**, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΕ** πρὸς **ΕΒ**, οὕτως ἡ **ΑΞ** πρὸς **ΞΔ**. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΑΔΓ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΑΓ** εὐθεῖα ἦκται ἡ **ΞΖ**, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ **ΑΞ** πρὸς **ΞΔ**, οὕτως ἡ **ΓΖ** πρὸς **ΖΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ **ΑΞ** πρὸς **ΞΔ**, οὕτως ἡ **ΑΕ** πρὸς **ΕΒ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΑΕ** πρὸς **ΕΒ**, οὕτως ἡ **ΓΖ** πρὸς **ΖΔ**. Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι᾿ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς **ΑΒ** ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς **ΑΒ** ἐπίπεδον τὸ **ΔΕ**, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ **ΔΕ** ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ **ΓΕ**, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς **ΓΕ** τυχὸν σημεῖον τὸ **Ζ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** τῇ **ΓΕ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ **ΔΕ** ἐπιπέδῳ ἡ **ΖΗ**.

Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ **ΑΒ**· ὥστε καὶ πρὸς τὴν **ΓΕ** ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΖ** γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΗΖΒ** ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΖΗ**. ἡ δὲ **ΑΒ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· καὶ ἡ **ΖΗ** ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ **ΓΕ** ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ **ΔΕ** πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ **ΖΗ** ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα **ΔΕ** ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς **ΑΒ** ἐπίπεδα ὀρθὰ τυχχανοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

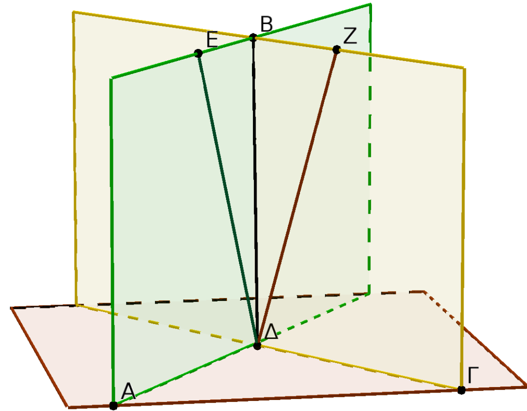
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι᾿ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθʹ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ **ΑΒ**, **ΒΓ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ **ΒΔ**· λέγω, ὅτι ἡ **ΒΔ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου ἐν μὲν τῷ **ΑΒ** ἐπιπέδῳ τῇ **ΑΔ** εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΔΕ**, ἐν δὲ τῷ **ΒΓ** ἐπιπέδῳ τῇ **ΓΔ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΔΖ**.



Καὶ ἐπεὶ τὸ **ΑΒ** ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ **ΑΔ** πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ **ΑΒ** ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ **ΔΕ**, ἡ **ΔΕ** ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ **ΔΖ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ **Δ** τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ **Δ** σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς **ΔΒ** κοινῆς τομῆς τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** ἐπιπέδων.

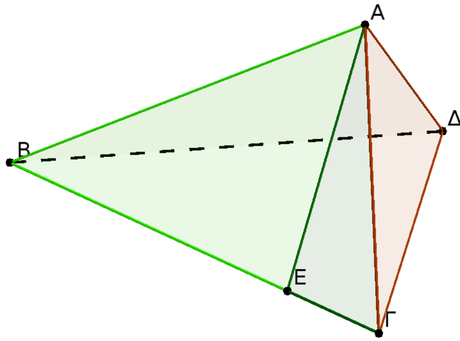
Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κʹ.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Α** ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΓΑΔ**, **ΔΑΒ** περιεχέσθω· λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΓΑΔ**, **ΔΑΒ** γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΓΑΔ**, **ΔΑΒ** γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ ὑπὸ **ΔΑΒ** γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν **ΒΑΓ** ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ**, καὶ κείσθω τῇ **ΑΔ** ἴση ἡ **ΑΕ**, καὶ διὰ τοῦ **Ε** σημείου διαχθεῖσα ἡ **ΒΕΓ** τεμνέτω τὰς **ΑΒ**, **ΑΓ** εὐθείας κατὰ τὰ **Β**, **Γ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΔΒ**, **ΔΓ**.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΑΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΑΒ**, δύο δυσὶν ἴσαι· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΔΑΒ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΑΕ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΔΒ** βάσει τῇ **ΒΕ** ἐστιν ἴση.

καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΒΔ**, **ΔΓ** τῆς **ΒΓ** μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ **ΔΒ** τῇ **ΒΕ** ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ **ΔΓ** λοιπῆς τῆς **ΕΓ** μείζων ἐστίν.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΔΑ** τῇ **ΑΕ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΑΓ**, καὶ βάσις ἡ **ΔΓ** βάσεως τῆς **ΕΓ** μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΔΑΓ** γωνάις τῆς ὑπὸ **ΕΑΓ** μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΑΒ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΕ** ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΔΑΒ**, **ΔΑΓ** τῆς ὑπὸ **ΒΑΓ** μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

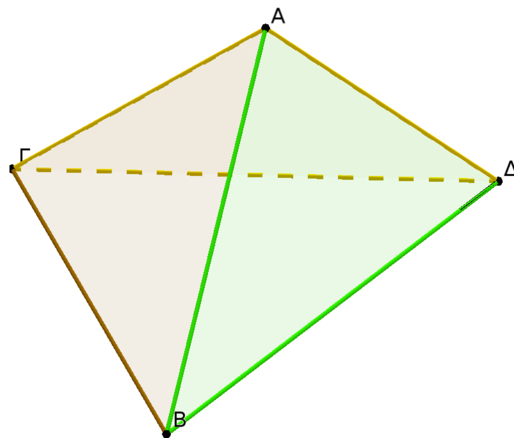
Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Α** περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΓΑΔ**, **ΔΑΒ**· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΓΑΔ**, **ΔΑΒ** τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ᾽ ἑκάστης τῶν **ΑΒ**, **ΑΓ**, **ΑΔ** τυχόντα σημεῖα τὰ **Β**, **Γ**, **Δ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΒ**. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Β** ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΔ**, **ΓΒΔ**, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΔ** τῆς ὑπὸ **ΓΒΔ** μείζονές εἰσιν.



διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ **ΒΓΑ**, **ΑΓΔ** τῆς ὑπὸ **ΒΓΔ** μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ **ΓΔΑ**, **ΑΔΒ** τῆς ὑπὸ **ΓΔΒ** μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑ-

πὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΔ**, **ΒΓΑ**, **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ**, **ΑΔΒ** τριῶν τῶν ὑπὸ **ΓΒΔ**, **ΒΓΑ**, **ΓΔΒ** μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ **ΓΒΔ**, **ΒΔΓ**, **ΒΓΔ** δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΒΔ**, **ΒΓΑ**, **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ**, **ΑΔΒ** δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσιν.

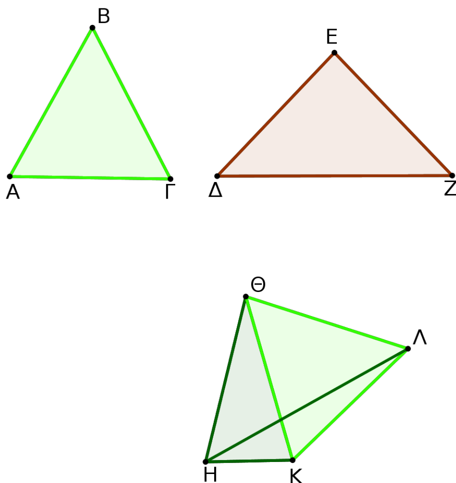
καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν **ΑΒΓ**, **ΑΓΔ**, **ΑΔΒ** τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΓΒΑ**, **ΑΓΒ**, **ΒΑΓ**, **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ**, **ΓΑΔ**, **ΑΔΒ**, **ΔΒΑ**, **ΒΑΔ** ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΒΓΑ**, **ΑΓΔ**, **ΓΔΑ**, **ΑΔΒ**, **ΔΒΑ** ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΓΑΔ**, **ΔΑΒ** τρεῖς [γωνίαι] περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ**, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τῆς ὑπὸ **ΗΘΚ**, αἱ δὲ ὑπὸ **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ** τῆς ὑπὸ **ΑΒΓ**, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ **ΗΘΚ**, **ΑΒΓ** τῆς ὑπὸ **ΔΕΖ**, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΗΘ**, **ΘΚ** εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΗΚ**· λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΗΚ** τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΗΚ** δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.



Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ** γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΗΚ** ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΗΚ** τρίγωνον συστήσασθαι.

εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΘΚ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Θ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΚΘΛ**· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΗΘ**, **ΘΚ** ἴση ἡ **ΘΛ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΚΛ**, **ΗΛ**.

καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δυσὶ ταῖς **ΚΘ**, **ΘΛ** ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Β** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΚΘΛ** ἴση, βάσις

ἄρα ἡ **ΑΓ** βάσει τῇ **ΚΛ** ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΗΘΚ** τῆς ὑπὸ **ΔΕΖ** μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΚΘΛ**, ἡ ἄρα ὑπὸ **ΗΘΛ** τῆς ὑπὸ **ΔΕΖ** μείζων ἐστίν.

καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΗΘ**, **ΘΛ** δύο ταῖς **ΔΕ**, **ΕΖ** ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΗΘΛ** γωνίας τῆς ὑπὸ **ΔΕΖ** μείζων, βάσις ἄρα ἡ **ΗΛ** βάσεως τῆς **ΔΖ** μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ **ΗΚ**, **ΚΛ** τῆς **ΗΛ** μείζονές εἰσιν. πολλῷ ἄρα αἱ **ΗΚ**, **ΚΛ** τῆς **ΔΖ** μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ **ΚΛ** τῇ **ΑΓ**· αἱ **ΑΓ**, **ΗΚ** ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς **ΔΖ** μείζονές εἰσιν.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν **ΑΓ**, **ΔΖ** τῆς **ΗΚ** μείζονές εἰσιν, καὶ ἔτι αἱ **ΔΖ**, **ΗΚ** τῆς **ΑΓ** μείζονές εἰσιν. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΗΚ** τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγʹ.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

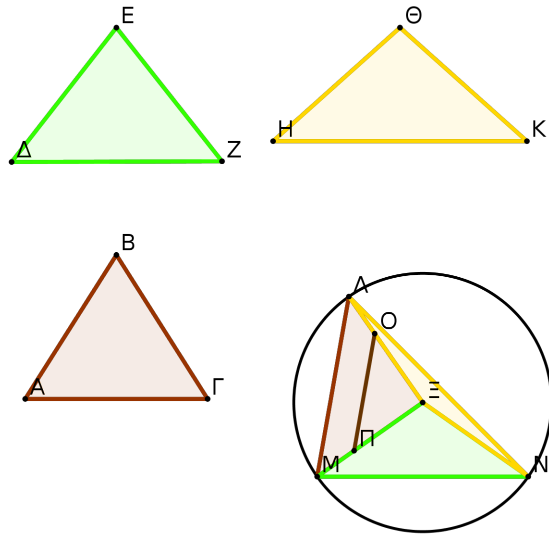
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ**, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ** στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΗΘ**, **ΘΚ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΗΚ**· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΗΚ** τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ **ΛΜΝ**, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν **ΑΓ** τῇ **ΛΜ**, τὴν δὲ **ΔΖ** τῇ **ΜΝ**, καὶ ἔτι τὴν **ΗΚ** τῇ **ΝΛ**, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ **ΛΜΝ** τρίγωνον κύκλος ὁ **ΛΜΝ**, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον καὶ ἔστω τὸ **Ξ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΛΞ**, **ΜΞ**, **ΝΞ**·

Λέγω, ὅτι ἡ **ΑΒ** μείζων ἐστὶ τῆς **ΛΞ**. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΛΞ** ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΛΞ**, ἀλλὰ ἡ μὲν **ΑΒ** τῇ **ΒΓ** ἐστιν ἴση, ἡ δὲ **ΞΛ** τῇ **ΞΜ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δύο ταῖς **ΛΞ**, **ΞΜ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ **ΑΓ** βάσει τῇ **ΛΜ** ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΛΞΜ** ἐστιν ἴση.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΔΕΖ** τῇ ὑπὸ **ΜΞΝ** ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ **ΗΘΚ** τῇ ὑπὸ **ΝΞΛ**· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ** γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ **ΛΞΜ**, **ΜΞΝ**, **ΝΞΛ** εἰσιν ἴσαι. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ **ΛΞΜ**, **ΜΞΝ**, **ΝΞΛ** τέτταρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ** τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ **ΑΒ** τῇ **ΛΞ** ἴση ἐστίν.

λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΛΞ**. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν **ΑΒ** ἴση ἡ **ΞΟ**, τῇ δὲ **ΒΓ** ἴση ἡ **ΞΠ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΟΠ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΒΓ**, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ **ΞΟ** τῇ **ΞΠ**· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ **ΛΟ** τῇ **ΠΜ** ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΛΜ** τῇ **ΟΠ**, καὶ ἰσογώνιον τὸ **ΛΜΞ** τῷ **ΟΠΞ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΞΛ** πρὸς **ΛΜ**, οὕτως ἡ **ΞΟ** πρὸς **ΟΠ**· ἐναλλὰξ ὡς ἡ **ΛΞ** πρὸς **ΞΟ**, οὕτως ἡ **ΛΜ** πρὸς **ΟΠ**. μείζων δὲ ἡ **ΛΞ** τῆς **ΞΟ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΛΜ** τῆς **ΟΠ**. ἀλλὰ ἡ **ΛΜ** κεῖται τῇ **ΑΓ** ἴση· καὶ ἡ **ΑΓ** ἄρα τῆς **ΟΠ** μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ** δυσὶ ταῖς **ΟΞ**, **ΞΠ** ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ **ΑΓ** βάσεως τῆς **ΟΠ** μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνίας τῆς ὑπὸ **ΟΞΠ** μεῖζων ἐστίν.



ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΔΕΖ** τῆς ὑπὸ **ΜΞΝ** μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ **ΗΘΚ** τῆς ὑπὸ **ΝΞΛ**. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ** τριῶν τῶν ὑπὸ **ΛΞΜ**, **ΜΞΝ**, **ΝΞΛ** μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ** τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΛΞΜ**, **ΜΞΝ**, **ΝΞΛ** τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ **ΑΒ** ἐλάσσων ἐστὶ τῆς **ΛΞ**. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ **ΑΒ** τῆς **ΛΞ**.

Ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ **ΛΜΝ** κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΞΡ**, καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΛΞ**, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς **ΞΡ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΡΛ**, **ΡΜ**, **ΡΝ**.

Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΡΞ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ **ΛΜΝ** κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν **ΛΞ**, **ΜΞ**, **ΝΞ** ὀρθή ἐστιν ἡ **ΡΞ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΛΞ** τῇ **ΞΜ**, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΞΡ**, βάσις ἄρα ἡ **ΡΛ** βάσει τῇ **ΡΜ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΡΝ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΡΛ**, **ΡΜ** ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ **ΡΛ**, **ΡΜ**, **ΡΝ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΛΞ**, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς **ΞΡ**, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΒ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΛΞ**, **ΞΡ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΛΞ**, **ΞΡ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΛΡ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ **ΛΞΡ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΒ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΡΛ**· ἴση ἄρα ἡ **ΑΒ** τῇ **ΡΛ**.

ἀλλὰ τῇ μὲν **ΑΒ** ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν **ΒΓ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΗΘ**, **ΘΚ**, τῇ δὲ **ΡΛ** ἴση ἑκατέρα τῶν **ΡΜ**, **ΡΝ**· ἑκάστη ἄρα τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΔΕ**, **ΕΖ**, **ΗΘ**, **ΘΚ** ἑκάστῃ τῶν **ΡΛ**, **ΡΜ**, **ΡΝ** ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΛΡ**, **ΡΜ** δυσὶ ταῖς **ΑΒ**, **ΒΓ** ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ **ΛΜ** βάσει τῇ **ΑΓ** ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΛΡΜ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ **ΜΡΝ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ **ΛΡΝ** τῇ ὑπὸ **ΗΘΚ**.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ **ΛΡΜ**, **ΜΡΝ**, **ΛΡΝ**, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, **ΗΘΚ**, στερεὰ γωνία συνέσταται ἡ πρὸς τῷ **Ρ** περιεχομένη ὑπὸ τῶν **ΛΡΜ**, **ΜΡΝ**, **ΛΡΝ** γωνιῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λῆμμα: Ὃν δὲ τρόπον, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΛΞ**, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΞΡ**, δείξομεν οὕτως.

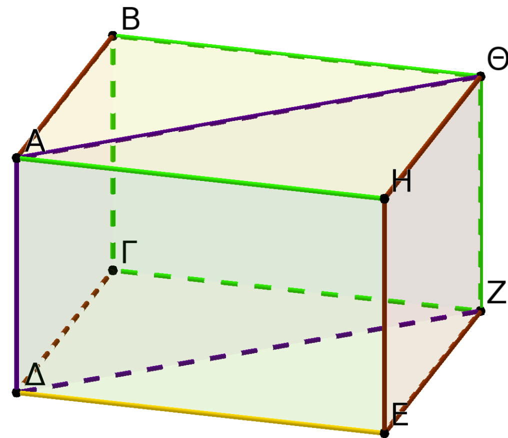
ἐκκείσθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΛΞ** εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ **ΑΒ**, καὶ γεγράφθω ἐπ᾽ αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ **ΑΒΓ**, καὶ εἰς τὸ **ΑΒΓ** ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ **ΛΞ** εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς **ΑΒ** διαμέτρου ἴση ἡ **ΑΓ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΓΒ**.

ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ **ΑΓΒ** γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ**, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ**. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΒ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΒ**. ἴση δὲ ἡ **ΑΓ** τῇ **ΛΞ**. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΛΞ** μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΒ**. ἐὰν οὖν τῇ **ΒΓ** ἴσην τὴν **ΞΡ** ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΛΞ** μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς **ΞΡ**· ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

κδʹ.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Στερεὸν γὰρ τὸ **ΓΔΘΗ** ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν **ΑΓ**, **ΗΖ**, **ΑΘ**, **ΔΖ**, **ΒΖ**, **ΑΕ**· λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ **ΒΗ**, **ΓΕ** ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ **ΑΓ** τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΓ**.

πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ **ΒΖ**, **ΑΕ** ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ **ΑΓ** τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΓ** τῇ **ΑΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΓ** παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΓ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν **ΔΖ**, **ΖΗ**, **ΗΒ**, **ΒΖ**, **ΑΕ** παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΘ**, **ΔΖ**. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν **ΑΒ** τῇ **ΔΓ**, ἡ δὲ **ΒΘ** τῇ **ΓΖ**, δύο δὴ αἱ **ΑΒ**, **ΒΘ** ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς **ΔΓ**, **ΓΖ** ἁπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΘ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΓΖ**. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΑΒ**, **ΒΘ** δυσὶ ταῖς **ΔΓ**, **ΓΖ** ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΘ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΔΓΖ** ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ **ΑΘ** βάσει τῇ **ΔΖ** ἐστιν ἴση, καὶ τὸ **ΑΒΘ** τρίγωνον τῷ **ΔΓΖ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

καί ἐστι τοῦ μὲν **ΑΒΘ** διπλάσιον τὸ **ΒΗ** παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ **ΔΓΖ** διπλάσιον τὸ **ΓΕ** παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ **ΒΗ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΓΕ** παραλληλογράμμῳ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν **ΑΓ** τῷ **ΗΖ** ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ **ΑΕ** τῷ **ΒΖ**.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ **ΑΒΓΔ** ἐπιπέδῳ τῷ **ΖΗ** τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς **ΡΑ**, **ΔΘ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΕΖΦ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΘΓΖ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΑΒΖΥ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΕΗΓΔ** στερεόν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ **ΑΘ** ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν **ΑΕ** ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ **ΑΚ**, **ΚΛ**, τῇ δὲ **ΕΘ** ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ **ΘΜ**, **ΜΝ**, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ **ΛΟ**, **ΚΦ**, **ΘΧ**, **ΜΣ** παραλληλόγραμμα καὶ τὰ **ΛΠ**, **ΚΡ**, **ΔΜ**, **ΜΤ** στερεά.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ **ΛΚ**, **ΚΑ**, **ΑΕ** εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν **ΛΟ**, **ΚΦ**, **ΑΖ** παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ **ΚΞ**, **ΚΒ**, **ΑΗ** ἀλλήλοις καὶ ἔτι τὰ **ΛΨ**, **ΚΠ**, **ΑΡ** ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν **ΕΓ**, **ΘΧ**, **ΜΣ** παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ **ΘΗ**, **ΘΙ**, **ΙΝ** ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ **ΔΘ**, **ΜΩ**, **ΝΤ**· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν **ΛΠ**, **ΚΡ**, **ΑΥ** στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ **ΛΠ**, **ΚΡ**, **ΑΥ** ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ **ΕΔ**, **ΔΜ**, **ΜΤ** ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ **ΛΖ** βάσις τῆς **ΑΖ** βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ **ΛΥ** στερεὸν τοῦ **ΑΥ** στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ **ΝΖ** βάσις τῆς **ΖΘ** βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ **ΝΥ** στερεὸν τοῦ **ΘΥ** στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ **ΛΖ** βάσις τῇ **ΝΖ** βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ **ΛΥ** στερεὸν τῷ **ΝΥ** στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ **ΛΖ** βάσις τῆς **ΝΖ** βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ **ΛΥ** στερεὸν τοῦ **ΝΥ** στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει.

τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν **ΑΖ**, **ΖΘ**, δύο δὲ στερεῶν τῶν **ΑΥ**, **ΥΘ**, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν **ΑΖ** βάσεως καὶ τοῦ **ΑΥ** στερεοῦ ἥ τε **ΛΖ** βάσις καὶ τὸ **ΛΥ** στερεόν, τῆς δὲ **ΘΖ** βάσεως καὶ τοῦ **ΘΥ** στερεοῦ ἥ τε **ΝΖ** βάσις καὶ τὸ **ΝΥ** στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ **ΛΖ** βάσις τῆς **ΖΝ** βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ **ΛΥ** στερεὸν τοῦ **ΝΥ**

[στερεοῦ], καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει.

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΖ** βάσις πρὸς τὴν **ΖΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΑΥ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΥΘ** στερεόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛʹ.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ **Α**, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Δ** περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ **ΕΔΓ**, **ΕΔΖ**, **ΖΔΓ** γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ πρὸς τῷ **Δ** στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς **ΔΖ** τυχὸν σημεῖον τὸ **Ζ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὸ διὰ τῶν **ΕΔ**, **ΔΓ** ἐπίπεδον κάθετος ἡ **ΖΗ**, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ **Η**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΗ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ μὲν ὑπὸ **ΕΔΓ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΑΛ**, τῇ δὲ ὑπὸ **ΕΔΗ** ἴση ἡ ὑπὸ **ΒΑΚ**, καὶ κείσθω τῇ **ΔΗ** ἴση ἡ **ΑΚ**, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ **Κ** σημείου τῷ διὰ τῶν **ΒΑΛ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΚΘ**, καὶ κείσθω ἴση τῇ **ΗΖ** ἡ **ΚΘ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΘΑ**· λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ **Α** στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν **ΒΑΛ**, **ΒΑΘ**, **ΘΑΛ** γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ **Δ** στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν **ΕΔΓ**, **ΕΔΖ**, **ΖΔΓ** γωνιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ **ΑΒ**, **ΔΕ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΘΒ**, **ΚΒ**, **ΖΕ**, **ΗΕ**. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΖΗ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΖΗΔ**, **ΖΗΕ** γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΘΚΑ**, **ΘΚΒ** γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΚΑ**, **ΑΒ** δύο ταῖς **ΗΔ**, **ΔΕ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ **ΚΒ** βάσει τῇ **ΗΕ** ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΚΘ** τῇ **ΗΖ** ἴση· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΘΒ** τῇ **ΖΕ**.

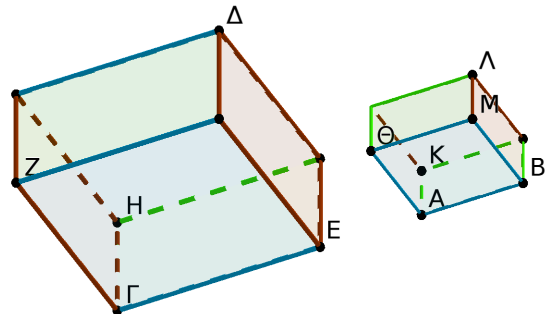
πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ **ΑΚ**, **ΚΘ** δυσὶ ταῖς **ΔΗ**, **ΗΖ** ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ **ΑΘ** βάσει τῇ **ΖΔ** ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** ἴση· δύο δὴ αἱ **ΘΑ**, **ΑΒ** δύο ταῖς **ΔΖ**, **ΔΕ** ἴσαι εἰσίν. καὶ βάσις ἡ **ΘΒ** βάσει τῇ **ΖΕ** ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΘ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΕΔΖ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΘΑΛ** τῇ ὑπὸ **ΖΔΓ** ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΛ** τῇ ὑπὸ **ΕΔΓ** ἴση. Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ **ΑΒ** καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ **Δ** ἴση συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κζʹ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ **ΓΔ**· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς **ΑΒ** τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ **ΓΔ** ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Α** τῇ πρὸς τῷ **Γ** στερεᾷ γωνίᾳ ἴση ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν **ΒΑΘ**, **ΘΑΚ**, **ΚΑΒ**, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ **ΒΑΘ** γωνίαν τῇ ὑπὸ **ΕΓΖ**, τὴν δὲ ὑπὸ **ΒΑΚ** τῇ ὑπὸ **ΕΓΗ**, τὴν δὲ ὑπὸ **ΚΑΘ** τῇ ὑπὸ **ΗΓΖ**· καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ **ΕΓ** πρὸς τὴν **ΓΗ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΚ**, ὡς δὲ ἡ **ΗΓ** πρὸς τὴν **ΓΖ**, οὕτως ἡ **ΚΑ** πρὸς τὴν **ΑΘ**. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΕΓ** πρὸς τὴν **ΓΖ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΘ**. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ **ΘΒ** παραλληλόγραμμον καὶ τὸ **ΑΛ** στερεόν.



Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΕΓ** πρὸς τὴν **ΓΗ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΚ**, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ **ΕΓΗ**, **ΒΑΚ** αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΗΕ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΚΒ** παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν **ΚΘ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΗΖ** παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι καὶ ἔτι τὸ **ΖΕ** τῷ **ΘΒ**· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ **ΑΛ** στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον

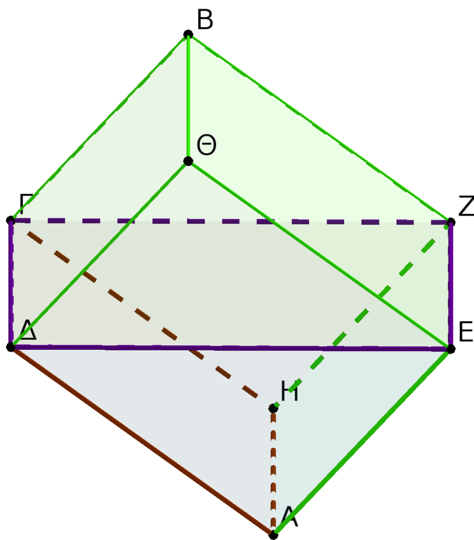
ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ **ΓΔ** στερεὸν ὅλῳ τῷ **ΑΛ** στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς **ΑΒ** τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ **ΓΔ** ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ **ΑΛ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κη΄.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ **ΑΒ** ἐπιπέδῳ τῷ **ΓΔΕΖ** τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς **ΓΖ**, **ΔΕ**· λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ **ΑΒ** στερεὸν ὑπὸ τοῦ **ΓΔΕΖ** ἐπιπέδου.



Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν **ΓΗΖ** τρίγωνον τῷ **ΓΖΒ** τριγώνῳ, τὸ δὲ **ΑΔΕ** τῷ **ΔΕΘ**, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν **ΓΑ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΕΒ** ἴσον· ἀπεναντίον γάρ· τὸ δὲ **ΗΕ** τῷ **ΓΘ**, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν **ΓΗΖ**, **ΑΔΕ**, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν **ΗΕ**, **ΑΓ**, **ΓΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν **ΓΖΒ**, **ΔΕΘ**, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν **ΓΘ**, **ΒΕ**, **ΓΕ**· ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ **ΑΒ** στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ **ΓΔΕΖ** ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

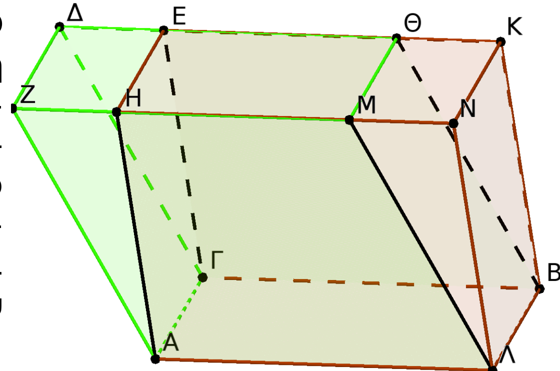
κθ΄.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς **ΑΒ** στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ **ΓΜ**, **ΓΝ** ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ **ΑΗ**, **ΑΖ**, **ΛΜ**, **ΛΝ**, **ΓΔ**, **ΓΕ**, **ΒΘ**,

ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν **ΖΝ**, **ΔΚ**· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΓΜ** στερεὸν τῷ **ΓΝ** στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν **ΓΘ**, **ΓΚ**, ἴση ἐστὶν ἡ **ΓΒ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΔΘ**, **ΕΚ**· ὥστε καὶ ἡ **ΔΘ** τῇ **ΕΚ** ἐστιν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ **ΕΘ**· λοιπὴ ἄρα ἡ **ΔΕ** λοιπῇ τῇ **ΘΚ** ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ τὸ μὲν **ΔΓΕ** τρίγωνον τῷ **ΘΒΚ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ **ΔΗ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΘΝ** παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΑΖΗ** τρίγωνον τῷ **ΜΛΝ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.



ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν **ΓΖ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΒΜ** παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ **ΓΗ** τῷ **ΒΝ**· ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν **ΑΖΗ**, **ΔΓΕ**, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν **ΑΔ**, **ΔΗ**, **ΓΗ** ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν **ΜΛΝ**, **ΘΒΚ**, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν **ΒΜ**, **ΘΝ**, **ΒΝ**. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΑΒ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΗΕΘΜ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΓΜ** στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ **ΓΝ** στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν.

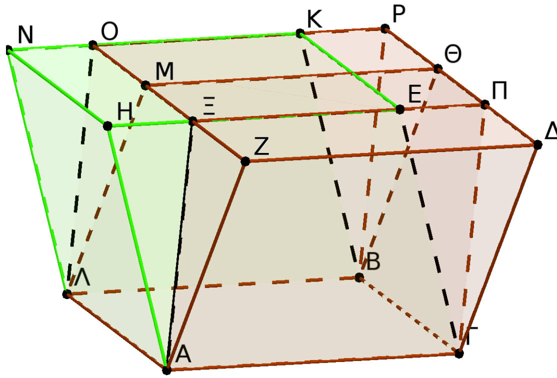
Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λʹ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς **ΑΒ** στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ **ΓΜ**, **ΓΝ** ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ **ΑΖ**, **ΑΗ**, **ΛΜ**, **ΛΝ**, **ΓΔ**, **ΓΕ**, **ΒΘ**, **ΒΚ** μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΓΜ** στερεὸν τῷ **ΓΝ** στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ **ΝΚ**, **ΔΘ** καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ **Ρ**, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ **ΖΜ**, **ΗΕ** ἐπὶ τὰ **Ο**, **Π**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΞ**, **ΛΟ**, **ΓΠ**, **ΒΡ**.



ἴσον δή ἐστι τὸ **ΓΜ** στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΑΓΒΛ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΖΔΘΜ**, τῷ **ΓΟ** στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΑΓΒΛ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΞΠΡΟ**· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς **ΑΓΒΛ** καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ **ΑΖ**, **ΑΞ**, **ΛΜ**, **ΛΟ**, **ΓΔ**, **ΓΠ**, **ΒΘ**, **ΒΡ** ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν **ΖΟ**, **ΔΡ**.

ἀλλὰ τὸ **ΓΟ** στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΓΒΛ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΞΠΡΟ**, ἴσον ἐστὶ τῷ **ΓΝ** στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΑΓΒΛ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΗΕΚΝ**· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς **ΑΓΒΛ** καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ **ΑΗ**, **ΑΞ**, **ΓΕ**, **ΓΠ**, **ΛΝ**, **ΛΟ**, **ΒΚ**, **ΒΡ** ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν **ΗΠ**, **ΝΡ**. ὥστε καὶ τὸ **ΓΜ** στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ **ΓΝ** στερεῷ.

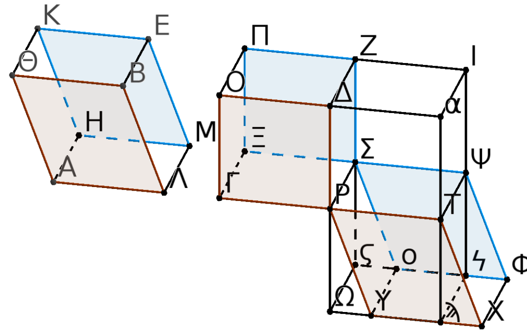
Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ **ΑΕ**, **ΓΖ** ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΕ** στερεὸν τῷ **ΓΖ** στερεῷ.

Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ **ΘΚ**, **ΒΕ**, **ΑΗ**, **ΛΜ**, **ΟΠ**, **ΔΖ**, **ΓΞ**, **ΡΣ** πρὸς ὀρθὰς ταῖς **ΑΒ**, **ΓΔ** βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾿ εὐθείας τῇ **ΓΡ** εὐθεῖα ἡ **ΡΤ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΡΤ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Ρ** τῇ ὑπὸ **ΑΛΒ** γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ **ΤΡΥ**, καὶ κείσθω τῇ μὲν **ΑΛ** ἴση ἡ **ΡΤ**, τῇ δὲ **ΛΒ** ἴση ἡ **ΡΥ**, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε **ΡΧ** βάσις καὶ τὸ **ΨΥ** στερεόν.



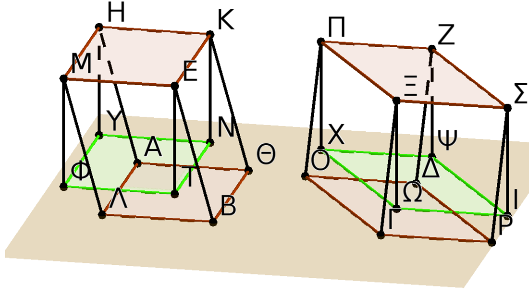
Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΤΡ**, **ΡΥ** δυσὶ ταῖς **ΑΛ**, **ΛΒ** ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ **ΡΧ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΘΛ** παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση μὲν ἡ **ΑΛ** τῇ **ΡΤ**, ἡ δὲ **ΛΜ** τῇ **ΡΣ**, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΡΨ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΑΜ** παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΛΕ** τῷ **ΣΥ** ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ **ΑΕ** στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ **ΨΥ** στερεοῦ ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΕ** στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ **ΨΥ** στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν.

διήχθωσαν αἱ **ΔΡ**, **ΧΥ** καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ **Ω**, καὶ διὰ τοῦ **Τ** τῇ **ΔΩ** παράλληλος ἤχθω ἡ **αΤϡ**, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ **ΟΔ** κατὰ τὸ **α**, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ **ΩΨ**, **ΡΙ** στερεά. ἴσον δή ἐστι τὸ **ΨΩ** στερεόν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ **ΡΨ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **Ωϟ**, τῷ **ΨΥ** στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΡΨ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΥΦ**· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς **ΡΨ** καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ **ΡΩ**, **ΡΥ**, **Τϡ**, **ΤΧ**, **Σς**, **Σõ**, **Ψϟ**, **ΨΦ** ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν **ΩΧ**, **ςΦ**.

ἀλλὰ τὸ **ΨΥ** στερεὸν τῷ **ΑΕ** ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ **ΨΩ** ἄρα στερεὸν τῷ **ΑΕ** στερεῷ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΡΥΧΤ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΩΤ** παραλληλογράμμῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς **ΡΤ** καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς **ΡΤ**, **ΩΧ**· ἀλλὰ τὸ **ΡΥΧΤ** τῷ **ΓΔ** ἐστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ **ΑΒ**, καὶ τὸ **ΩΤ** ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ **ΓΔ** ἐστιν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ **ΔΤ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΤ**, οὕτως ἡ **ΩΤ** πρὸς τὴν **ΔΤ**. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ **ΓΙ** ἐπιπέδῳ τῷ **ΡΖ** τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ **ΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΤ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΓΖ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΡΙ** στερεόν.

διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ **ΩΙ** ἐπιπέδῳ τῷ **ΡΨ** τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ **ΩΤ** βάσις πρὸς τὴν **ΤΛ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΩΨ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΡΙ**. ἀλλ' ὡς ἡ **ΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΤ**, οὕτως ἡ **ΩΤ** πρὸς τὴν **ΔΤ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΓΖ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΡΙ** στερεόν, οὕτως τὸ **ΩΨ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΡΙ**. ἑκάτερον ἄρα τῶν **ΓΖ**, **ΩΨ** στερεῶν πρὸς τὸ **ΡΙ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΓΖ** στερεὸν τῷ **ΩΨ** στερεῷ. ἀλλὰ τὸ **ΩΨ** τῷ **ΑΕ** ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ **ΑΕ** ἄρα τῷ **ΓΖ** ἐστιν

ἴσον.



Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ **ΑΗ**, **ΘΚ**, **ΒΕ**, **ΛΜ**, **ΓΞ**, **ΟΠ**, **ΔΖ**, **ΡΣ** πρὸς ὀρθὰς ταῖς **ΑΒ**, **ΓΔ** βάσεσιν· λέγω πάλιν, ὅτι ἴσον τὸ **ΑΕ** στερεὸν τῷ **ΓΖ** στερεῷ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν **Κ**, **Ε**, **Η**, **Μ**, **Π**, **Ζ**, **Ξ**, **Σ** σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ **ΚΝ**, **ΕΤ**, **ΗΥ**, **ΜΦ**, **ΠΧ**, **ΖΨ**, **ΞΩ**, **ΣΙ**, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ **Ν**, **Τ**, **Υ**, **Φ**, **Χ**, **Ψ**, **Ω**, **Ι** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΝΤ**, **ΝΥ**, **ΥΦ**, **ΤΦ**, **ΧΨ**, **ΧΩ**, **ΩΙ**, **ΙΨ**.

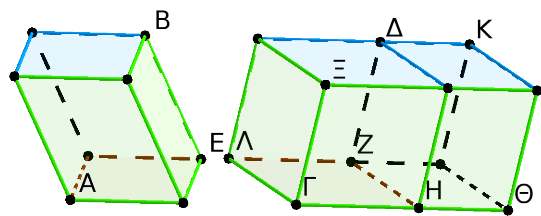
ἴσον δή ἐστι τὸ **ΚΦ** στερεὸν τῷ **ΠΙ** στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν **ΚΜ**, **ΠΣ** καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν **ΚΦ** στερεὸν τῷ **ΑΕ** στερεῷ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ **ΠΙ** τῷ **ΓΖ**· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὔκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ **ΑΕ** ἄρα στερεὸν τῷ **ΓΖ** στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβʹ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ**· λέγω, ὅτι τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΕ** βάσις πρὸς τὴν **ΓΖ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΔ** στερεόν.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν **ΖΗ** τῷ **ΑΕ** ἴσον τὸ **ΖΘ**, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς **ΖΘ**, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ **ΓΔ** στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ **ΗΚ**. ἴσον δή ἐστι τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΗΚ** στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν **ΑΕ**, **ΖΘ** καὶ ὑπὸ τὸ αὐτο ὕψος.

καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ **ΓΚ** ἐπιπέδῳ τῷ **ΔΗ** τέτμηται

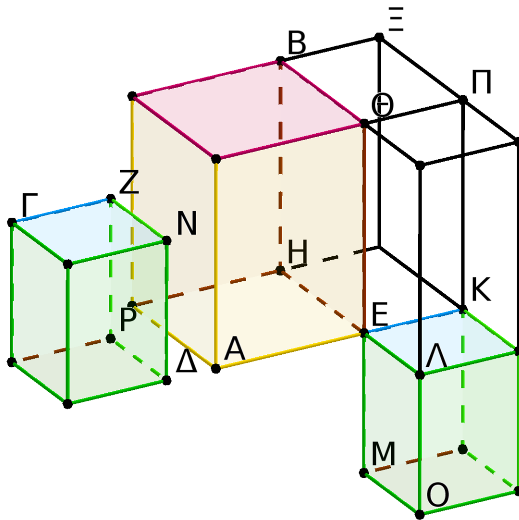
παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΓΖ** βάσις πρὸς τὴν **ΖΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΓΔ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΔΘ** στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΖΘ** βάσις τῇ **ΑΕ** βάσει, τὸ δὲ **ΗΚ** στερεὸν τῷ **ΑΒ** στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ **ΑΕ** βάσις πρὸς τὴν **ΓΖ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΔ** στερεόν.

Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγʹ.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ**, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ **ΑΕ** τῇ **ΓΖ**· λέγω, ὅτι τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΔ** στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ **ΑΕ** πρὸς τὴν **ΓΖ**.



Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς **ΑΕ**, **ΗΕ**, **ΘΕ** αἱ **ΕΚ**, **ΕΛ**, **ΕΜ**, καὶ κείσθω τῇ μὲν **ΓΖ** ἴση ἡ **ΕΚ**, τῇ δὲ **ΖΝ** ἴση ἡ **ΕΛ**, καὶ ἔτι τῇ **ΖΡ** ἴση ἡ **ΕΜ**, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ **ΚΛ** παραλληλόγραμμον καὶ τὸ **ΚΟ** στερεόν.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΚΕ**, **ΕΛ** δυσὶ ταῖς **ΓΖ**, **ΖΝ** ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΚΕΛ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΓΖΝ** ἐστιν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΕΗ** τῇ ὑπὸ **ΓΖΝ** ἐστιν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ [καὶ ὅμοιον] τὸ **ΚΛ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΓΝ** παραλληλογράμμῳ.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν **ΚΜ** παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ **ΓΡ** [παραλληλογράμμῳ] καὶ ἔτι τὸ **ΕΟ** τῷ **ΔΖ**· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ **ΚΟ** στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ **ΚΟ** στερεὸν ὅλῳ τῷ **ΓΔ** στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον.

συμπεπληρώσθω τὸ **ΗΚ** παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν **ΗΚ**, **ΚΛ** παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ **ΑΒ** στερεὰ συμπεπληρώσθω

τὰ **ΕΞ**, **ΛΠ**. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ **ΑΕ** πρὸς τὴν **ΓΖ**, οὕτως ἡ **ΕΗ** πρὸς τὴν **ΖΝ**, καὶ ἡ **ΕΘ** πρὸς τὴν **ΖΡ**, ἴση δὲ ἡ μὲν **ΓΖ** τῇ **ΕΚ**, ἡ δὲ **ΖΝ** τῇ **ΕΛ**, ἡ δὲ **ΖΡ** τῇ **ΕΜ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΕ** πρὸς τὴν **ΕΚ**, οὕτως ἡ **ΗΕ** πρὸς τὴν **ΕΛ** καὶ ἡ **ΘΕ** πρὸς τὴν **ΕΜ**.

ἀλλ' ὡς μὲν ἡ **ΑΕ** πρὸς τὴν **ΕΚ**, οὕτως τὸ **ΑΗ** [παραλληλόγραμμον] πρὸς τὸ **ΗΚ** παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ **ΗΕ** πρὸς τὴν **ΕΛ**, οὕτως τὸ **ΗΚ** πρὸς τὸ **ΚΛ**, ὡς δὲ ἡ **ΘΕ** πρὸς **ΕΜ**, οὕτως τὸ **ΠΕ** πρὸς τὸ **ΚΜ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΗ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΗΚ**, οὕτως τὸ **ΗΚ** πρὸς τὸ **ΚΛ** καὶ τὸ **ΠΕ** πρὸς τὸ **ΚΜ**. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ **ΑΗ** πρὸς τὸ **ΗΚ**, οὕτως τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΕΞ** στερεόν, ὡς δὲ τὸ **ΗΚ** πρὸς τὸ **ΚΛ**, οὕτως τὸ **ΞΕ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΠΛ** στερεόν, ὡς δὲ τὸ **ΠΕ** πρὸς τὸ **ΚΜ**, οὕτως τὸ **ΠΛ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΚΟ** στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΕΞ**, οὕτως τὸ **ΕΞ** πρὸς τὸ **ΠΛ** καὶ τὸ **ΠΛ** πρὸς τὸ **ΚΟ**.

ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· τὸ **ΑΒ** ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ **ΚΟ** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΕΞ**. ἀλλ' ὡς τὸ **ΑΒ** πρὸς τὸ **ΕΞ**, οὕτως τὸ **ΑΗ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΗΚ** καὶ ἡ **ΑΕ** εὐθεῖα πρὸς τὴν **ΕΚ**· ὥστε καὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΚΟ** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΑΕ** πρὸς τὴν **ΕΚ**. ἴσον δὲ τὸ [μὲν] **ΚΟ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ, ἡ δὲ **ΕΚ** εὐθεῖα τῇ **ΓΖ**· καὶ τὸ **ΑΒ** ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΔ** στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ **ΑΕ** πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν **ΓΖ**.

Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐπείπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

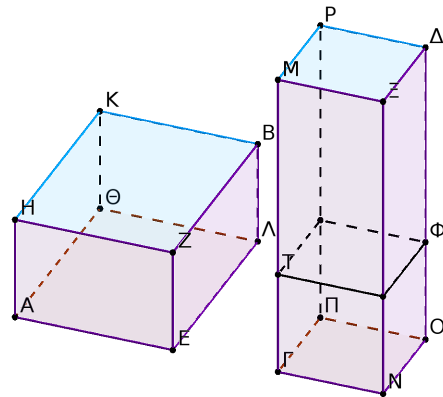
λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ **ΑΒ**, **ΓΔ**· λέγω, ὅτι τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν

ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψος.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ **ΑΗ**, **ΕΖ**, **ΛΒ**, **ΘΚ**, **ΓΜ**, **ΝΞ**, **ΟΔ**, **ΠΡ** πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΓΜ** πρὸς τὴν **ΑΗ**. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΘ** βάσιν τῇ **ΝΠ** βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ **ΓΜ** τῇ **ΑΗ** ἴση. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ἔσται ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ**, οὕτως ἡ **ΓΜ** πρὸς τὴν **ΑΗ**, καὶ φανερόν, ὅτι τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ **ΕΘ** βάσις τῇ **ΝΠ** βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ **ΕΘ**. ἔστι δὲ καὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ **ΓΜ** τῆς **ΑΗ**. κείσθω οὖν τῇ **ΑΗ** ἴση ἡ **ΓΤ**, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς **ΝΠ**, ὕψους δὲ τοῦ **ΓΤ**, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ **ΦΓ**. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ, ἔξωθεν δὲ τὸ **ΓΦ**, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΦ** στερεόν, οὕτως τὸ **ΓΔ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΦ** στερεόν.

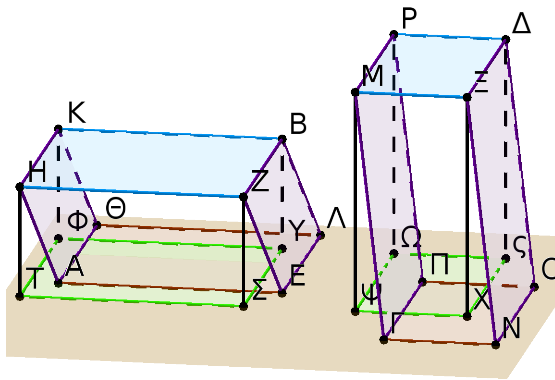
ἀλλ' ὡς μὲν τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΦ** στερεόν, οὕτως ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν· ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ **ΑΒ**, **ΓΦ** στερεά· ὡς δὲ τὸ **ΓΔ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΦ** στερεόν, οὕτως ἡ **ΜΠ** βάσις πρὸς τὴν **ΤΠ** βάσιν καὶ ἡ **ΓΜ** πρὸς τὴν **ΓΤ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΜΓ** πρὸς τὴν **ΓΤ**. ἴση δὲ ἡ **ΓΤ** τῇ **ΑΗ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΜΓ** πρὸς τὴν **ΑΗ**. τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ.

Ἔστωσαν [γὰρ] πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν. καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΘ** βάσις τῇ **ΝΠ** βάσει, καί ἐστιν ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψει.

τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεά παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ. Μὴ ἔστω δὴ ἡ **ΕΘ** βάσις τῇ **ΝΠ** [βάσει] ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ **ΕΘ**· μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος τοῦ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ **ΓΜ** τῆς **ΑΗ**. κείσθω τῇ **ΑΗ** ἴση πάλιν ἡ **ΓΤ**, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ **ΓΦ** στερεόν. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΜΓ** πρὸς τὴν **ΑΗ**, ἴση δὲ ἡ **ΑΗ** τῇ **ΓΤ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΓΜ** πρὸς τὴν **ΓΤ**.

ἀλλ' ὡς μὲν ἡ **ΕΘ** [βάσις] πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΦ** στερεόν· ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ **ΑΒ**, **ΓΦ** στερεά· ὡς δὲ ἡ **ΓΜ** πρὸς τὴν **ΓΤ**, οὕτως ἥ τε **ΜΠ** βάσις πρὸς τὴν **ΠΤ** βάσιν καὶ τὸ **ΓΔ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΦ** στερεόν. καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΒ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΦ** στερεόν, οὕτως τὸ **ΓΔ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΓΦ** στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** πρὸς τὸ **ΓΦ** τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ.



Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ **ΖΕ**, **ΒΛ**, **ΗΑ**, **ΚΘ**, **ΞΝ**, **ΔΟ**, **ΜΓ**, **ΡΠ** πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν **Ζ**, **Η**, **Β**, **Κ**, **Ξ**, **Μ**, **Ρ**, **Δ** σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν **ΕΘ**, **ΝΠ** ἐπίπεδα κάθετοι καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ **Σ**, **Τ**, **Υ**, **Φ**, **Χ**, **Ψ**, **Ω**, **ς**, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ **ΖΦ**, **ΞΩ** στερεά· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ **ΕΘ** βάσιν πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν **ΑΒ** τῷ **ΒΤ** ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς **ΖΚ** καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· τὸ δὲ **ΓΔ** στερεὸν τῷ **ΔΨ** ἐστιν ἴσον· ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς **ΡΞ** καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· καὶ τὸ **ΒΤ** ἄρα στερεὸν τῷ **ΔΨ** στερεῷ ἴσον ἐστίν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΖΚ** βάσις πρὸς τὴν **ΞΡ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΔΨ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΒΤ** στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΖΚ** βάσις τῇ **ΕΘ** βάσει, ἡ δὲ **ΞΡ** βάσις τῇ **ΝΠ** βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΔΨ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΒΤ** στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν **ΔΨ**, **ΒΤ** στερεῶν καὶ τῶν **ΔΓ**, **ΒΑ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΔΓ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒ**

στερεοῦ ὕψος. τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒ** στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΕΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΝΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν **ΕΘ** βάσις τῇ **ΖΚ** βάσει, ἡ δὲ **ΝΠ** τῇ **ΞΡ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΖΚ** βάσις πρὸς τὴν **ΞΡ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΓΔ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΑΒ** στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** στερεῶν καὶ τῶν **ΒΤ**, **ΔΨ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΖΚ** βάσις πρὸς τὴν **ΞΡ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΔΨ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΒΤ** στερεοῦ ὕψος. τῶν **ΒΤ**, **ΔΨ** ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΤ** στερεὸν τῷ **ΔΨ** στερεῷ. ἀλλὰ τὸ μὲν **ΒΤ** τῷ **ΒΑ** ἴσον ἐστίν· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως [εἰσι] τῆς **ΖΚ** καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. τὸ δὲ **ΔΨ** στερεὸν τῷ **ΔΓ** στερεῷ ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ **ΑΒ** ἄρα στερεὸν τῷ **ΓΔ** στερεῷ ἐστιν ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε′.

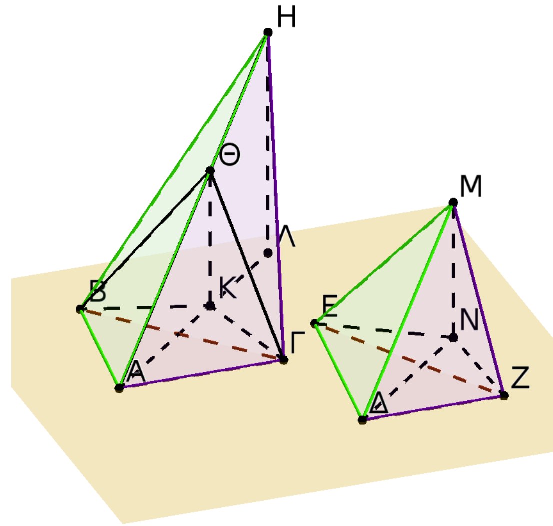
Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ **ΒΑΓ**, **ΕΔΖ**, ἀπὸ δὲ τῶν **Α**, **Δ** σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ **ΑΗ**, **ΔΜ** ἴσας γωνίας περιέχουσιν μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ **ΜΔΕ** τῇ ὑπὸ **ΗΑΒ**, τὴν δὲ ὑπὸ **ΜΔΖ** τῇ ὑπὸ **ΗΑΓ**, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν **ΑΗ**, **ΔΜ** τυχόντα σημεῖα τὰ **Η**, **Μ**, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν **Η**, **Μ** σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν **ΒΑΓ**, **ΕΔΖ** ἐπίπεδα κάθετοι αἱ **ΗΛ**, **ΜΝ**, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ **Λ**, **Ν**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΛΑ**, **ΝΔ**· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΗΑΛ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΜΔΝ** γωνίᾳ.

Κείσθω τῇ **ΔΜ** ἴση ἡ **ΑΘ**, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ **Θ** σημείου τῇ **ΗΛ** παράλληλος ἡ **ΘΚ**. ἡ δὲ **ΗΛ** κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν **ΒΑΓ** ἐπίπεδον· καὶ ἡ **ΘΚ** ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν **ΒΑΓ** ἐπίπεδον.

ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν **Κ**, **Ν** σημείων ἐπὶ τὰς **ΑΓ**, **ΔΖ**, **ΑΒ**, **ΔΕ** εὐθείας κάθετοι αἱ **ΚΓ**, **ΝΖ**, **ΚΒ**, **ΝΕ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΘΓ**, **ΓΒ**, **ΜΖ**, **ΖΕ**. ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΘΑ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΘΚ**, **ΚΑ**, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΚΑ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΚΓ**, **ΓΑ**, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΘΑ** ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΘΚ**, **ΚΓ**, **ΓΑ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΘΚ**, **ΚΓ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΘΓ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΘΑ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΘΓ**, **ΓΑ**. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΘΓΑ** γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΔΖΜ** γωνία ὀρθή ἐστιν.

ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΓΘ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΖΜ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΘΑΓ** τῇ ὑπὸ **ΜΔΖ** ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΜΔΖ**, **ΘΑΓ** δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν **ΘΑ** τῇ **ΜΔ**· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκαρέρᾳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ** ἐστιν ἴση.



ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΓ** τῇ **ΔΖ**, ἡ δὲ **ΑΒ** τῇ **ΔΕ**, δύο δὴ αἱ **ΓΑ**, **ΑΒ** δυσὶ ταῖς **ΖΔ**, **ΔΕ** ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΓΑΒ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΖΔΕ** ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΒΓ** βάσει τῇ **ΕΖ** ἴση ἐστὶ καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΒ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΖΕ**. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΑΓΚ** ὀρθῇ τῇ ὑπὸ **ΔΖΝ** ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΓΚ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΕΖΝ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΒΚ** τῇ ὑπὸ **ΖΕΝ** ἐστιν ἴση.

δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΒΓΚ**, **ΕΖΝ** [τὰς] δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν **ΒΓ** τῇ **ΕΖ**· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΓΚ** τῇ **ΖΝ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΑΓ** τῇ **ΔΖ** ἴση· δύο δὴ αἱ **ΑΓ**, **ΓΚ** δυσὶ ταῖς **ΔΖ**, **ΖΝ** ἴσαι εἰσίν· καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν. βάσις ἄρα ἡ **ΑΚ** βάσει τῇ **ΔΝ** ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΘ** τῇ **ΔΜ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΘ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΜ**. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς **ΑΘ** ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΚ**, **ΚΘ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ **ΑΚΘ**· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΔΜ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΔΝ**, **ΝΜ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ **ΔΝΜ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΚ**, **ΚΘ** ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΔΝ**, **ΝΜ**, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΚ** ἴσον ἐστὶ

τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΝ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΚΘ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΝΜ**· ἴση ἄρα ἡ **ΘΚ** τῇ **ΜΝ**.

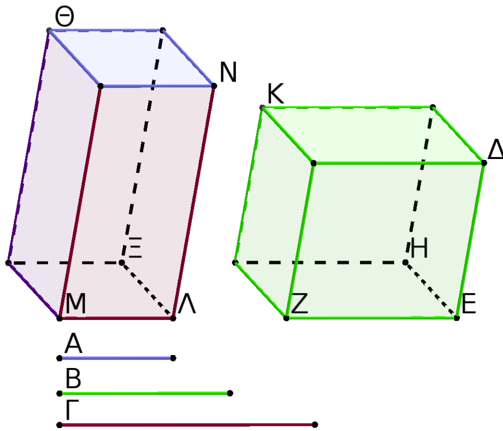
καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΘΑ**, **ΑΚ** δυσὶ ταῖς **ΜΔ**, **ΔΝ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ **ΘΚ** βάσει τῇ **ΜΝ** ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΘΑΚ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΜΔΝ** ἐστιν ἴση. Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ᾽ αὐτῶν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛʹ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ **Α**, **Β**, **Γ**, ὡς ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, οὕτως ἡ **Β** πρὸς τὴν **Γ**· λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **Β** στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.



Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ **Ε** περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ **ΔΕΗ**, **ΗΕΖ**, **ΖΕΔ**, καὶ κείσθω τῇ μὲν **Β** ἴση ἑκάστη τῶν **ΔΕ**, **ΗΕ**, **ΕΖ**, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ **ΕΚ** στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ **Α** ἴση ἡ **ΛΜ**, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ **ΛΜ** εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ **Λ** τῇ πρὸς τῷ **Ε** στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν **ΝΛΞ**, **ΞΛΜ**, **ΜΛΝ**, καὶ κείσθω τῇ μὲν **Β** ἴση ἡ **ΛΞ**, τῇ δὲ **Γ** ἴση ἡ **ΛΝ**.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **Α** πρὸς τὴν **Β**, οὕτως ἡ **Β** πρὸς τὴν **Γ**, ἴση δὲ ἡ μὲν **Α** τῇ **ΛΜ**, ἡ δὲ **Β** ἑκατέρᾳ τῶν **ΛΞ**, **ΕΔ**, ἡ δὲ **Γ** τῇ **ΛΝ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΛΜ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, οὕτως ἡ **ΔΕ** πρὸς τὴν **ΛΝ**. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ **ΝΛΜ**, **ΔΕΖ** αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΜΝ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΔΖ** παραλληλογραμάμμῳ.

καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ **ΔΕΖ**, **ΝΛΜ**, καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστᾶσιν αἱ **ΛΞ**, **ΕΗ** ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν **Η**, **Ξ** σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν **ΝΛΜ**, **ΔΕΖ** ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ **ΛΘ**, **ΕΚ** στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστίν.

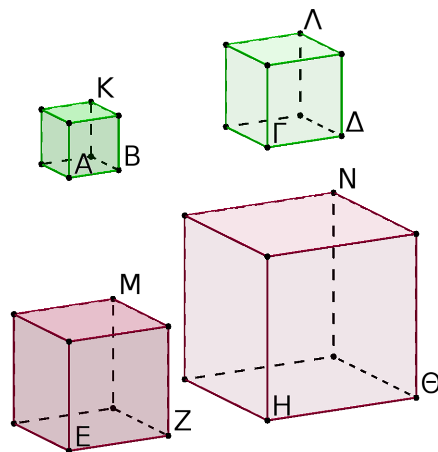
τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΘΛ** στερεὸν τῷ **ΕΚ** στερεῷ. καί ἐστι τὸ μὲν **ΛΘ** τὸ ἐκ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** στερεόν, τὸ δὲ **ΕΚ** τὸ ἀπὸ τῆς **Β** στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν **Α**, **Β**, **Γ** στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **Β** στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζʹ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ **ΑΒ**, **ΓΔ**, **ΕΖ**, **ΗΘ**, ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ**, **ΕΖ**, **ΗΘ** ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ **ΚΑ**, **ΛΓ**, **ΜΕ**, **ΝΗ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ **ΚΑ** πρὸς τὸ **ΛΓ**, οὕτως τὸ **ΜΕ** πρὸς τὸ **ΝΗ**.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΚΑ** στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ **ΛΓ**, τὸ **ΚΑ** ἄρα πρὸς τὸ **ΛΓ** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΜΕ** πρὸς τὸ **ΝΗ** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**.



καί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**. καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΚ** πρὸς τὸ **ΛΓ**, οὕτως τὸ **ΜΕ** πρὸς τὸ **ΝΗ**. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ **ΑΚ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΛΓ** στερεόν, οὕτως τὸ **ΜΕ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΝΗ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒ** εὐθεῖα πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ **ΚΑ** πρὸς τὸ **ΛΓ** τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, ἔχει δὲ καὶ τὸ **ΜΕ** πρὸς τὸ **ΝΗ** τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ **ΕΖ**

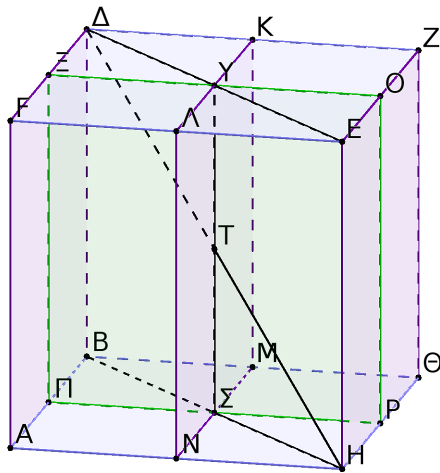
πρὸς τὴν **ΗΘ**, καί ἐστιν ὡς τὸ **ΚΑ** πρὸς τὸ **ΛΓ**, οὕτως τὸ **ΜΕ** πρὸς τὸ **ΝΗ**, καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΗΘ**.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι καὶ τὰ ἑξῆς τῆς προτάσεως· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Κύβου γὰρ τοῦ **ΑΖ** τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν **ΓΖ**, **ΑΘ** αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ **Κ**, **Λ**, **Μ**, **Ν**, **Ξ**, **Π**, **Ο**, **Ρ** σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ **ΚΝ**, **ΞΡ**, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ **ΥΣ**, τοῦ δὲ **ΑΖ** κύβου διαγώνιος ἡ **ΔΗ**. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΥΤ** τῇ **ΤΣ**, ἡ δὲ **ΔΤ** τῇ **ΤΗ**.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΔΥ**, **ΥΕ**, **ΒΣ**, **ΣΗ**. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΔΞ** τῇ **ΟΕ**, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ **ΔΞΥ**, **ΥΟΕ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΔΞ** τῇ **ΟΕ**, ἡ δὲ **ΞΥ** τῇ **ΥΟ**, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ **ΔΥ** τῇ **ΥΕ** ἐστιν ἴση, καὶ τὸ **ΔΞΥ** τρίγωνον τῷ **ΟΥΕ** τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΞΥΔ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΟΥΕ** γωνίᾳ. διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ **ΔΥΕ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ **ΒΣΗ** εὐθεῖά ἐστιν, καὶ ἴση ἡ **ΒΣ** τῇ **ΣΗ**.

καὶ ἐπεὶ ἡ **ΓΑ** τῇ **ΔΒ** ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ **ΓΑ** καὶ τῇ **ΕΗ** ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, καὶ ἡ **ΔΒ** ἄρα τῇ **ΕΗ** ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ **ΔΕ**, **ΒΗ**· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΔΕ** τῇ **ΒΗ**. ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ **ΕΔΤ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΒΗΤ**· ἐναλλὰξ γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ **ΔΤΥ** τῇ ὑπὸ **ΗΤΣ**. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΔΤΥ**, **ΗΤΣ** τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν **ΔΥ** τῇ **ΗΣ**· ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν **ΔΕ**, **ΒΗ**· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν **ΔΤ** τῇ **ΤΗ**, ἡ δὲ **ΥΤ** τῇ **ΤΣ**.

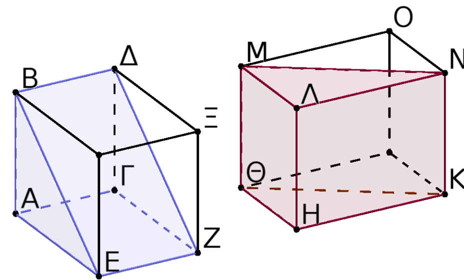
Ἐὰν ἄρα κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθʹ.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ **ΑΒΓΔΕΖ**, **ΗΘΚΛΜΝ**, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ **ΑΖ** παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ **ΗΘΚ** τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ **ΑΖ** παραλληλόγραμμον τοῦ **ΗΘΚ** τριγώνου· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** πρίσμα τῷ **ΗΘΚΛΜΝ** πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ **ΑΞ**, **ΗΟ** στερεά. ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ **ΑΖ** παραλληλόγραμμον τοῦ **ΗΘΚ** τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ **ΘΚ** παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ **ΗΘΚ** τριγώνου, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΖ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΘΚ** παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΞ** στερεὸν τῷ **ΗΟ** στερεῷ.



καί ἐστι τοῦ μὲν **ΑΞ** στερεοῦ ἥμισυ τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** πρίσμα, τοῦ δὲ **ΗΟ** στερεοῦ ἥμισυ τὸ **ΗΘΚΛΜΝ** πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** πρίσμα τῷ **ΗΘΚΛΜΝ** πρίσματι.

Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔστὶ τὰ πρίσματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

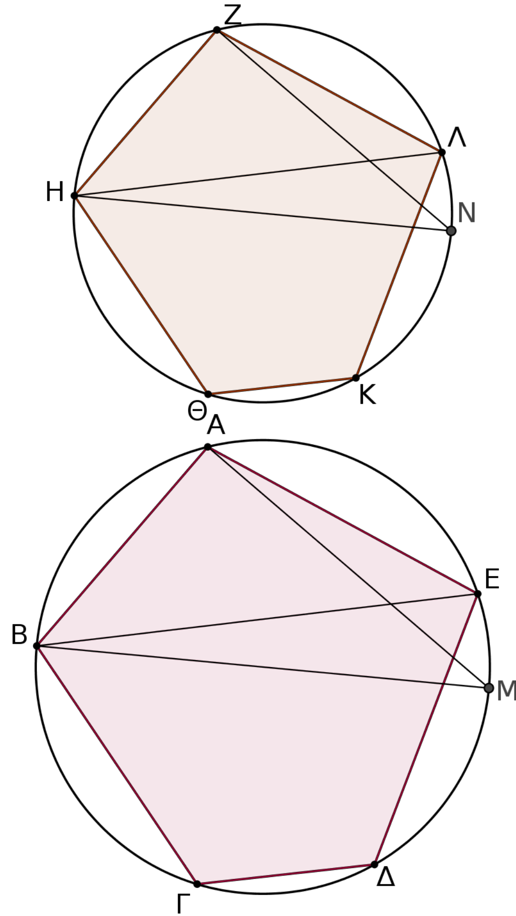
ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΒΙΒΛΙΟ 12

α′.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ **ΑΒΓ**, **ΖΗΘ**, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ **ΑΒΓΔΕ**, **ΖΗΘΚΛ**, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν **ΒΜ**, **ΗΝ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΜ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΗΝ** τετράγωνον, οὕτως τὸ **ΑΒΓΔΕ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνον.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΕ**, **ΑΜ**, **ΗΛ**, **ΖΝ**. καὶ ἐπεὶ ὅμοιον τὸ **ΑΒΓΔΕ** πολύγωνον τῷ **ΖΗΘΚΛ** πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΗΖΛ**, καί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΕ**, οὕτως ἡ **ΗΖ** πρὸς τὴν **ΖΛ**. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ **ΒΑΕ**, **ΗΖΛ** μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ **ΒΑΕ** τῇ ὑπὸ **ΗΖΛ**, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον τῷ **ΖΗΛ** τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΖΛΗ**.

ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΕΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΜΒ** ἐστιν ἴση· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ **ΖΛΗ** τῇ ὑπὸ **ΖΝΗ**· καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΜΒ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΖΝΗ** ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΒΑΜ** ὀρθῇ τῇ ὑπὸ **ΗΖΝ** ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΜ** τρίγωνον τῷ **ΖΗΝ** τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΜ** πρὸς τὴν **ΗΝ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΗΖ**.

ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς **ΒΜ** πρὸς τὴν **ΗΝ** λόγον διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΜ** τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΗΝ** τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΗΖ** διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ **ΑΒΓΔΕ** πολυγώνου πρὸς τὸ **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΜ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΗΝ** τετράγωνον, οὕτως τὸ **ΑΒΓΔΕ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνον.

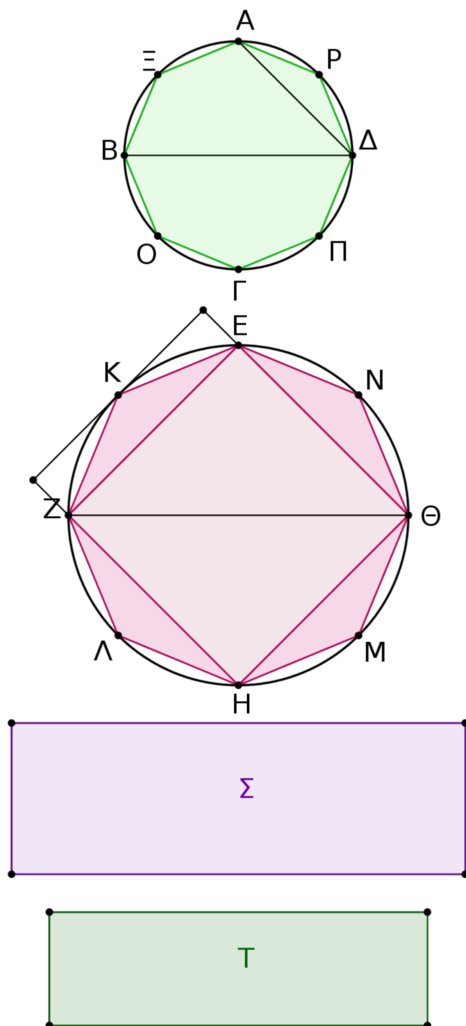
Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β´.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ**, διάμετροι δὲ αὐτῶν [ἔστωσαν] αἱ **ΒΔ**, **ΖΘ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ** τετράγωνον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ**, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ**, οὕτως ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον.



ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ **Σ**. και ἐγγεγράφθω εἰς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον τετράγωνον τὸ **ΕΖΗΘ**. τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ** σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ **ΕΖΗΘ** τετράγωνον, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ **ΕΖΗΘ** ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου.

τετμήσθωσαν δίχα αἱ **ΕΖ**, **ΖΗ**, **ΗΘ**, **ΘΕ** περιφέρειαι κατὰ τὰ **Κ**, **Λ**, **Μ**, **Ν** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΚ**, **ΚΖ**, **ΖΛ**, **ΛΗ**, **ΗΜ**, **ΜΘ**, **ΘΝ**, **ΝΕ**· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν **ΕΚΖ**, **ΖΛΗ**, **ΗΜΘ**, **ΘΝΕ** τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν **Κ**, **Λ**, **Μ**, **Ν** σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν **ΕΖ**, **ΖΗ**, **ΗΘ**, **ΘΕ** εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν **ΕΚΖ**, **ΖΛΗ**, **ΗΜΘ**, **ΘΝΕ** τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ

τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν **ΕΚΖ**, **ΖΛΗ**, **ΗΜΘ**, **ΘΝΕ** τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος τοῦ **Σ** χωρίου.

ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν **ΕΚ**, **ΚΖ**, **ΖΛ**, **ΛΗ**, **ΗΜ**, **ΜΘ**, **ΘΝ**, **ΝΕ** τμήματα τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος τοῦ **Σ** χωρίου.

λοιπὸν ἄρα τὸ **ΕΚΖΛΗΜΘΝ** πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ **Σ** χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τῷ **ΕΚΖΛΗΜΘΝ** πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ **ΑΞΒΟΓΠΔΡ**· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ** τετράγωνον, οὕτως τὸ **ΑΞΒΟΓΠΔΡ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΕΚΖΛΗΜΘΝ** πολύγωνον.

ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ**, οὕτως ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸ **Σ** χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸ **Σ** χωρίον, οὕτως τὸ **ΑΞΒΟΓΠΔΡ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΕΚΖΛΗΜΘΝ** πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ **Σ** χωρίον πρὸς τὸ **ΕΚΖΛΗΜΘΝ** πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ **Σ** χωρίον τοῦ **ΕΚΖΛΗΜΘΝ** πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ**, οὕτως ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου χωρίον.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ **ΖΘ** πρὸς τὸ ἀπὸ **ΒΔ**, οὕτως ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου χωρίον. Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ**, οὕτως ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ **Σ**. ἀνάπαλιν ἄρα [ἐστὶν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**, οὕτως τὸ **Σ** χωρίον πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ **Σ** χωρίον πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**, οὕτως ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ**, οὕτως ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΘ**, οὕτως ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον. Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α : Λέγω δή, ὅτι τοῦ **Σ** χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ **Σ** χωρίον πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ **Σ** χωρίον πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς τὸ **Τ** χωρίον. λέγω, ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ **Τ** χωρίον τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ **Σ** χωρίον πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς τὸ **Τ** χωρίον, ἐναλλάξ ἐστιν ὡς τὸ **Σ** χωρίον πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸ **Τ** χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ **Σ** χωρίον τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος τοῦ **Τ** χωρίου.

ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ **Σ** χωρίον πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ [ὁμοίας] τῇ ὅλῃ τριγώνους ἐχουσας βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον· λέγω, ὅτι ἡ **ΑΒΓΔ** πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΑ**, **ΑΔ**, **ΔΒ**, **ΔΓ** δίχα κατὰ τὰ **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΘΕ**, **ΕΗ**, **ΗΘ**, **ΘΚ**, **ΚΛ**, **ΛΘ**, **ΚΖ**, **ΖΗ**. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΕ** τῇ **ΕΒ**, ἡ δὲ **ΑΘ** τῇ **ΔΘ**, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΕΘ** τῇ **ΔΒ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΘΚ** τῇ **ΑΒ** παράλληλός ἐστιν.

παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΘΕΒΚ**· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΘΚ** τῇ **ΕΒ**. ἀλλὰ ἡ **ΕΒ** τῇ **ΕΑ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ **ΑΕ** ἄρα τῇ **ΘΚ** ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΑΘ** τῇ **ΘΔ** ἴση· δύο δὴ αἱ **ΕΑ**, **ΑΘ** δυσὶ ταῖς **ΚΘ**, **ΘΔ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΑΘ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΚΘΔ** ἴση· βάσις ἄρα ἡ **ΕΘ** βάσει τῇ **ΚΔ** ἐστιν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΑΕΘ** τρίγωνον τῷ **ΘΚΔ** τριγώνῳ.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΑΘΗ** τρίγωνον τῷ **ΘΛΔ** τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ **ΕΘ**, **ΘΗ** παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς **ΚΔ**, **ΔΛ** εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΕΘΗ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΚΔΛ** γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ **ΕΘ**, **ΘΗ** δυσὶ ταῖς **ΚΔ**, **ΔΛ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα εκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΕΘΗ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΚΔΛ** ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ **ΕΗ** βάσει τῇ **ΚΛ** [ἐστιν] ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ **ΕΘΗ** τρίγωνον τῷ **ΚΔΛ** τριγώνῳ.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΑΕΗ** τρίγωνον τῷ **ΘΚΛ** τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΕΗ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Θ** σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΘΚΛ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον.

καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ **ΑΔΒ** παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν **ΑΒ** ἦκται ἡ **ΘΚ**, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ **ΑΔΒ** τρίγωνον τῷ **ΔΘΚ** τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΔΒ** τρίγωνον τῷ **ΔΘΚ** τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν **ΔΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΔΚΛ** τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν, τὸ δὲ **ΑΔΓ** τῷ **ΔΛΘ**.

καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ **ΒΑ**, **ΑΓ** παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς **ΚΘ**, **ΘΛ** εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΚΘΛ**. καί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως ἡ **ΚΘ** πρὸς τὴν **ΘΛ**· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΘΚΛ** τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΘΚΛ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον.

ἀλλὰ πυραμίς, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ **ΘΚΛ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΕΗ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Θ** σημεῖον. ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΑΕΗΘ**, **ΘΚΛΔ** πυραμίδων ὁμοία

ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ **ΑΒΓΔ** πυραμίδι.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΖ** τῇ **ΖΓ**, διπλάσιόν ἐστι τὸ **ΕΒΖΗ** παραλληλόγραμμον τοῦ **ΗΖΓ** τριγώνου. καὶ ἐπεί, ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν **ΒΚΖ**, **ΕΘΗ**, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν **ΕΒΖΗ**, **ΕΒΚΘ**, **ΘΚΖΗ** τῷ πρισματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν **ΗΖΓ**, **ΘΚΛ**, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν **ΚΖΓΛ**, **ΛΓΗΘ**, **ΘΚΖΗ**.

καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ **ΕΒΖΗ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ **ΘΚ** εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ **ΗΖΓ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΘΚΛ** τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ **ΑΕΗ**, **ΘΚΛ** τρίγωνα, κορυφαὶ, δὲ τὰ **Θ**, **Δ** σημεῖα, ἐπειδήπερ [καί] ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς **ΕΖ**, **ΕΚ** εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ **ΕΒΖΗ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ **ΘΚ** εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις τὸ **ΕΒΖ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Κ** σημεῖον.

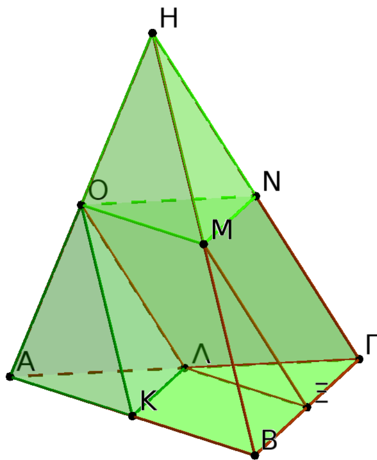
ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ **ΕΒΖ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Κ** σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ **ΑΕΗ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Θ** σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΕΒΖΗ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ **ΘΚ** εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΑΕΗ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Θ** σημεῖον.

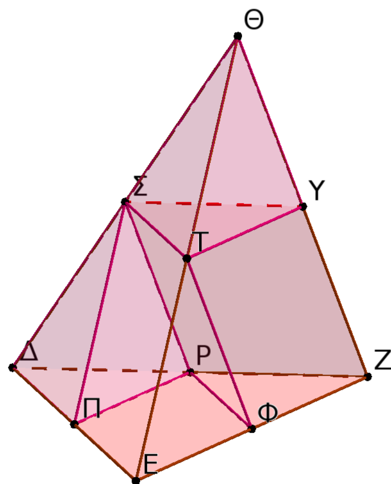
ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ **ΕΒΖΗ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ **ΘΚ** εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΗΖΓ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΘΚΛ** τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ **ΑΕΗ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Θ** σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ **ΘΚΛ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ **ΑΕΗ**, **ΘΚΛ** τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ **Θ**, **Δ** σημεῖα.

Ἡ ἄρα ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον, διῄρηται εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις [καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δʹ.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτάρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.





Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, κορυφὰς δὲ τὰ **Η**, **Θ** σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ **ΑΒΓΗ** πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΒΞ** τῇ **ΞΓ**, ἡ δὲ **ΑΛ** τῇ **ΛΓ**, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΛΞ** τῇ **ΑΒ** καὶ ὅμοιον τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΛΞΓ** τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον τῷ **ΡΦΖ** τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν **ΒΓ** τῆς **ΓΞ**, ἡ δὲ **ΕΖ** τῆς **ΖΦ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΓΞ**, οὕτως ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΖΦ**.

καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν **ΒΓ**, **ΓΞ** ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ **ΑΒΓ**, **ΛΞΓ**, ἀπὸ δὲ τῶν **ΕΖ**, **ΖΦ** ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα [εὐθύγραμμα] τὰ **ΔΕΖ**, **ΡΦΖ**· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΛΞΓ** τρίγωνον, οὕτως τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΡΦΖ** τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΔΕΖ** [τρίγωνον], οὕτως τὸ **ΛΞΓ** [τρίγωνον] πρὸς τὸ **ΡΦΖ** τρίγωνον.

ἀλλ' ὡς τὸ **ΛΞΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΡΦΖ** τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν [ἐστι] τὸ **ΛΞΓ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΟΜΝ**, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΡΦΖ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΣΤΥ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΛΞΓ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΟΜΝ**, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΡΦΖ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΣΤΥ**.

ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΚΒΞΛ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ **ΟΜ** εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΠΕΦΡ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ **ΣΤ** εὐθεῖα. καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ **ΚΒΞΛ** παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ **ΟΜ**, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ **ΛΞΓ**, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΟΜΝ**, πρὸς τὰ πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ **ΠΕΦΡ**, ἀπεναντίον δὲ ἡ **ΣΤ** εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ **ΡΦΖ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΣΤΥ**. καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ **ΟΜΝΗ**, **ΣΤΥΘ** πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται ὡς ἡ **ΟΜΝ** βάσις πρὸς τὴν **ΣΤΥ** βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ **ΟΜΝΗ** πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ **ΣΤΥΘ** πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ **ΟΜΝ** βάσις πρὸς τὴν **ΣΤΥ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν **ΟΜΝ**, **ΣΤΥ** τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν **ΛΞΓ**, **ΡΦΖ**. καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ **ΑΒΓΗ** πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α : Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ **ΛΞΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΡΦΖ** τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ **ΛΞΓ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΟΜΝ**, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΡΦΖ** [τρίγωνον], ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΣΤΥ**, οὕτω δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν **Η**, **Θ** κάθετοι ἐπὶ τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἥ τε **ΗΓ** καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ **Η** κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν **ΑΒΓ**, **ΟΜΝ** τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ **ΗΓ** δίχα ὑπὸ τοῦ **ΟΜΝ** ἐπιπέδου κατὰ τὸ **Ν**· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ **Η** ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ **ΑΒΓ** ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ **ΟΜΝ** ἐπιπέδου.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ **Θ** κάθετος ἐπὶ τὸ **ΔΕΖ** ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ **ΣΤΥ** ἐπιπέδου. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν **Η**, **Θ** κάθετοι ἐπὶ τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν **ΟΜΝ**, **ΣΤΥ** τριγώνων ἐπὶ τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** κάθετοι. ἰσοϋψῆ ἄρα [ἐστὶ] τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ **ΛΞΓ**, **ΡΦΖ** τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ **ΟΜΝ**, **ΣΤΥ**. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα ἰσοϋψῆ καὶ πρὸς ἄλληλά [εἰσιν] ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΛΞΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΡΦΖ** βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ **Η**, **Θ** σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΔΕΖΘ** πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΔΕΖΘ** πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον.

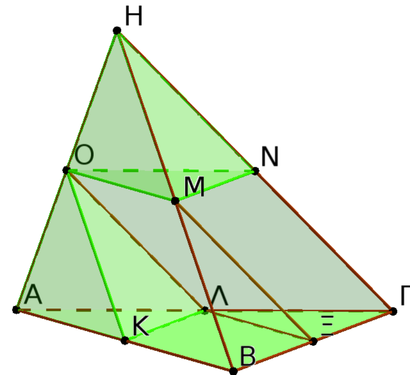
ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ **Χ**, καὶ διῃρήσθω ἡ **ΔΕΖΘ** πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσαμτα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ **ΔΕΖΘ** πυραμὶς τοῦ **Χ** στερεοῦ.

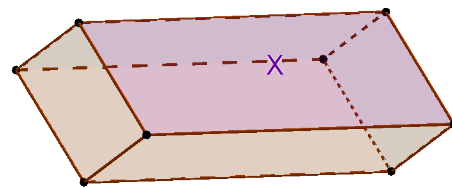
λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκεν αἱ **ΔΠΡΣ**, **ΣΤΥΘ**· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ **Χ** στερεοῦ.

διῃρήσθω καὶ ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ **ΑΒΓΗ** πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι πρίσματα, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς τὸ **Χ** στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς τὸ **Χ** στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ **ΑΒΓΗ** πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ **Χ** στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι πρίσματα.

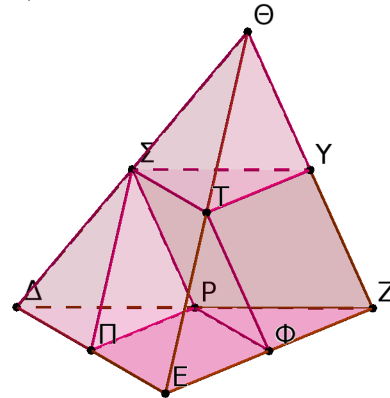
μείζων δὲ ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ **Χ** στερεὸν τῶν ἐν τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ **ΔΕΖ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΒΓ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΔΕΖΘ** πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος στερεόν.



Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος στερεόν.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ **Χ**· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΔΕΖ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΒΓ** βάσιν, οὕτως τὸ **Χ** στερεὸν πρὸς τὴν **ΑΒΓΗ** πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ **Χ** στερεὸν πρὸς τὴν **ΑΒΓΗ** πυραμίδα, οὕτως ἡ **ΔΕΖΘ** πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΔΕΖ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΒΓ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΔΕΖΘ** πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη.

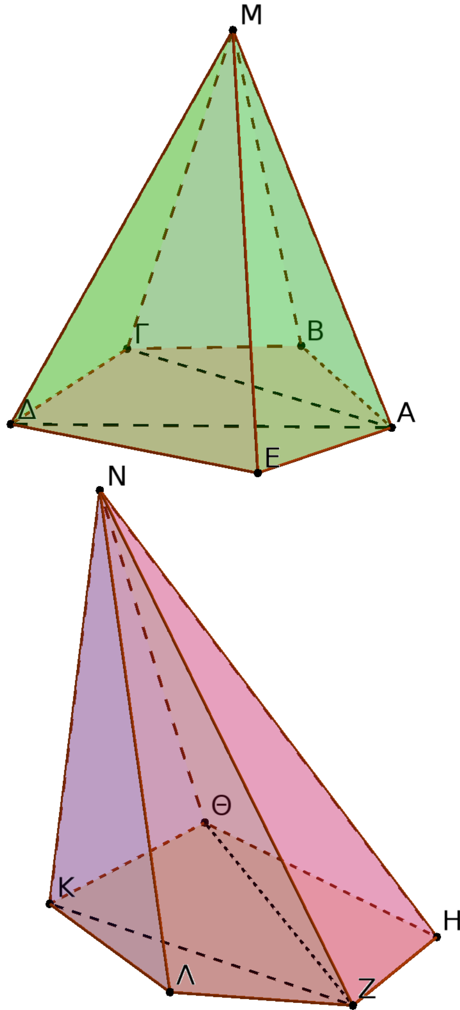


οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΔΕΖΘ** πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛʹ.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν τὰ **ΑΒΓΔΕ**, **ΖΗΘΚΛ** πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ **Μ**, **Ν** σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒΓΔΕ** βάσις πρὸς τὴν **ΖΗΘΚΛ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΔΕΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΖΗΘΚΛΝ** πυραμίδα.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΑΓ**, **ΑΔ**, **ΖΘ**, **ΖΚ**. ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ **ΑΒΓΜ**, **ΑΓΔΜ** τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΓΔ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΑΓΔΜ** πυραμίδα. καὶ συνθέντι ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΓΔ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΔΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΑΓΔΜ** πυραμίδα.

ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ **ΑΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΔΕ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΓΔΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΑΔΕΜ** πυραμίδα. δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΔΕ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΔΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΑΔΕΜ** πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ **ΑΒΓΔΕ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΔΕ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΔΕΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΑΔΕΜ** πυραμίδα.

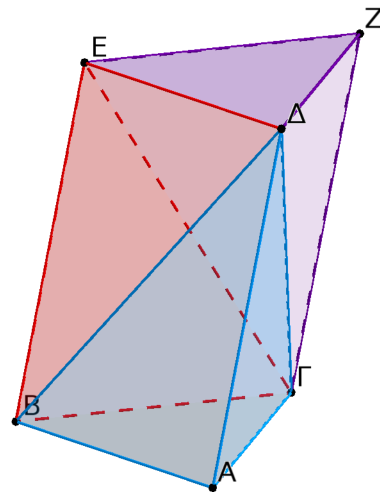
ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ **ΖΗΘΚΛ** βάσις πρὸς τὴν **ΖΗΘ** βάσιν, οὕτως καὶ ἡ **ΖΗΘΚΛΝ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΖΗΘΝ** πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ **ΑΔΕΜ**, **ΖΗΘΝ** τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΔΕ** βάσις πρὸς τὴν **ΖΗΘ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΔΕΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΖΗΘΝ** πυραμίδα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ **ΑΔΕ** βάσις πρὸς τὴν **ΑΒΓΔΕ** βάσιν, οὕτως ἦν ἡ **ΑΔΕΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΑΒΓΔΕΜ** πυραμίδα. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓΔΕ** βάσις πρὸς τὴν **ΖΗΘ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΔΕΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΖΗΘΝ** πυραμίδα.

ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ **ΖΗΘ** βάσις πρὸς τὴν **ΖΗΘΚΛ** βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ **ΖΗΘΝ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΖΗΘΚΛΝ** πυραμίδα, καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓΔΕ** βάσις πρὸς τὴν **ΖΗΘΚΛ** βάσιν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΔΕΜ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΖΗΘΚΛΝ** πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΔΕΖ**· λέγω, ὅτι τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΒΔ**, **ΕΓ**, **ΓΔ**. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ **ΑΒΕΔ**, διάμετρος δὲ αὐτὸῦ ἐστιν ἡ **ΒΔ**, ἴσον ἄρα ἐστι τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον τῷ **ΕΒΔ** τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Γ** σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΔΕΒ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Γ** σημεῖον.

ἀλλὰ ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΔΕΒ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Γ** σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΕΒΓ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Γ** σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΕΒΓ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον.

πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ **ΖΓΒΕ**, διάμετρος δέ ἐστιν αὐτοῦ ἡ **ΓΕ**, ἴσον ἐστὶ τὸ **ΓΕΖ** τρίγωνον τῷ **ΓΒΕ** τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΒΓΕ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΕΓΖ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον. ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΒΓΕ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Γ** σημεῖον·

καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΓΕΖ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Γ** σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ **ΑΒΓΔΕΖ** πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Καὶ ἐπεὶ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Γ** σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ **ΓΑΒ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται· ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ **ΑΒΔ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Γ** σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΔΕΖ**, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Δ** σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσις τὴν αὐτὴν τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ **ΔΕΖ**.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

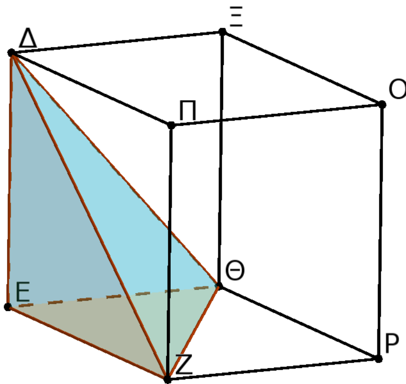
Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

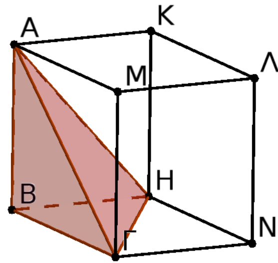
Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ** τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ **Η**, **Θ** σημεῖα· λέγω, ὅτι ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΔΕΖΘ** πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ **ΒΗΜΛ**, **ΕΘΠΟ** στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΔΕΖ** γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ **ΗΒΓ** τῇ ὑπὸ **ΘΕΖ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΒΗ** τῇ ὑπὸ **ΔΕΘ**, καί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΔΕ**, οὕτως ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, καὶ ἡ **ΒΗ** πρὸς τὴν **ΕΘ**.

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΔΕ**, οὕτως ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΜ** παραλληλόγραμμον τῷ **ΕΠ** παραλληλογράμμῳ.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν **ΒΝ** τῷ **ΕΡ** ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ **ΒΚ** τῷ **ΕΞ**· τὰ τρία ἄρα τὰ **ΜΒ**, **ΒΚ**, **ΒΝ** τρισὶ τοῖς **ΕΠ**, **ΕΞ**, **ΕΡ** ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ **ΜΒ**, **ΒΚ**, **ΒΝ** τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν, τὰ δὲ τρία τὰ **ΕΠ**, **ΕΞ**, **ΕΡ** τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν.





τὰ **ΒΗΜΛ**, **ΕΘΠΟ** ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΗΜΛ** στερεὸν τῷ **ΕΘΠΟ** στερεῷ.

τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ **ΒΗΜΛ** ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ **ΕΘΠΟ** στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν **ΕΖ**.

ὡς δὲ τὸ **ΒΗΜΛ** στερεὸν πρὸς τὸ **ΕΘΠΟ** στερεόν, οὕτως ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΔΕΖΘ** πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ **ΑΒΓΗ** ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν **ΔΕΖΘ** πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α : **Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις ἔσται ὡς [ἡ] ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγον πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.**

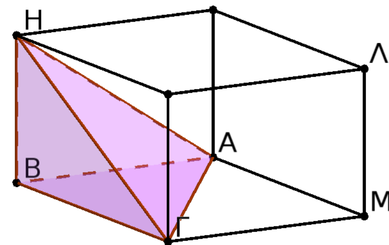
θʹ.

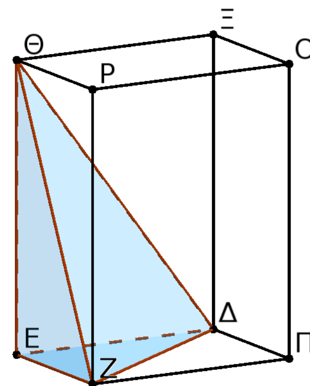
Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, κορυφὰς δὲ τὰ **Η**, **Θ** σημεῖα· λέγω, ὅτι τῶν **ΑΒΓΗ**, **ΔΕΖΘ** πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὸ τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος ὕψος.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ **ΒΗΜΛ**, **ΕΘΠΟ** στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν **ΑΒΓΗ** πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ **ΒΗΜΛ** στερεόν, τῆς δὲ **ΔΕΖΘ** πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ **ΕΘΠΟ** στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΗΜΛ** στερεὸν τῷ **ΕΘΠΟ** στερεῷ.

τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΜ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΕΘΠΟ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΒΗΜΛ** στερεοῦ ὕψος. ἀλλ᾽ ὡς ἡ **ΒΜ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΠ**, οὕτως τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον πρὸς τὸ **ΔΕΖ** τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ **ΕΘΠΟ** στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΒΗΜΛ** στερεοῦ ὕψος.





ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ **ΕΘΠΟ** στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστι τῷ τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ **ΒΗΜΛ** στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὸ τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος ὕψος.

τῶν **ΑΒΓΗ**, **ΔΕΖΘ** ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν **ΑΒΓΗ**, **ΔΕΖΘ** πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὸ τῆς **ΔΕΖΘ**

πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος ὕψος· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὸ τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος ὕψος, ἀλλ' ὡς ἡ **ΑΒΓ** βάσις πρὸς τὴν **ΔΕΖ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΒΜ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΕΠ** παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ **ΒΜ** παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ **ΕΠ** παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος ὕψος.

ἀλλὰ τὸ [μὲν] τῆς **ΔΕΖΘ** πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ **ΕΘΠΟ** παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς **ΑΒΓΗ** πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ **ΒΗΜΛ** παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΜ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΠ** βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ **ΕΘΠΟ** παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ **ΒΗΜΛ** παραλληλεπιπέδου ὕψος.

ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΗΜΛ** στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ **ΕΘΠΟ** στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. καί ἐστι τοῦ μὲν **ΒΗΜΛ** ἕκτον μέρος ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμίς, τοῦ δὲ **ΕΘΠΟ** παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ **ΔΕΖΘ** πυραμίς· ἴση ἄρα ἡ **ΑΒΓΗ** πυραμὶς τῇ **ΔΕΖΘ** πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

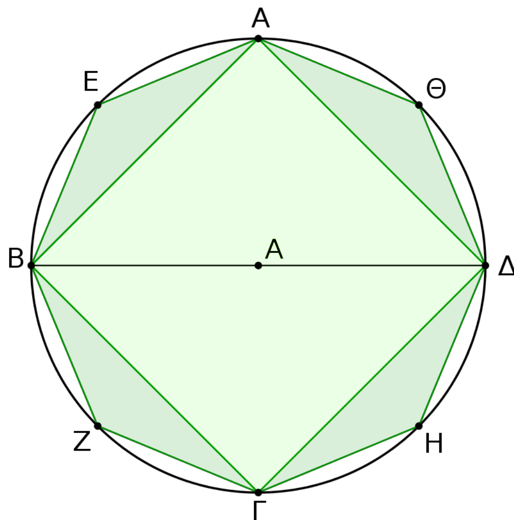
Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων.

ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τετράγωνον τὸ **ΑΒΓΔ**· τὸ δὴ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνιστάμενον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου· καί ἐστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ πα-

ραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ **ΑΒΓΔ** ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· καί ἐστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνατραθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου.



τετμήσθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ** περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΒΖ**, **ΖΓ**, **ΓΗ**, **ΗΔ**, **ΔΘ**, **ΘΑ**· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν **ΑΕΒ**, **ΒΖΓ**, **ΓΗΔ**, **ΔΘΑ** τριγώνων μειζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν.

ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν **ΑΕΒ**, **ΒΖΓ**, **ΓΗΔ**, **ΔΘΑ** τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ** σημείων παραλλήλους ταῖς **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ** ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ** παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν **ΑΕΒ**, **ΒΖΓ**, **ΓΗΔ**, **ΔΘΑ** τριγώνων· καί ἐστι τὰ τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν **ΑΕΒ**, **ΒΖΓ**, **ΓΗΔ**, **ΔΘΑ** τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων.

τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάσου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κυλίνδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.

λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΒΖ**, **ΖΓ**, **ΓΗ**, **ΗΔ**, **ΔΘ**, **ΘΑ**· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ **ΑΕΒΖΓΗΔΘ** πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίν-

δρῳ, μεῖζόν ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ **ΑΕΒΖΓΗΔΘ** πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΕΒΖΓΗΔΘ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν [ἐστι] τὸ **ΑΕΒΖΓΗΔΘ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντες τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μεῖζων ἢ τριπλάσιος.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μεῖζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος.

ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τετράγωνον τὸ **ΑΒΓΔ**· τὸ **ΑΒΓΔ** ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ **ΑΒΓΔ** τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου.

καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ **ΑΒΓΔ** τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ** περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΒΖ**, **ΖΓ**, **ΓΗ**, **ΗΔ**, **ΔΘ**, **ΘΑ**· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν **ΑΕΒ**, **ΒΖΓ**, **ΓΗΔ**, **ΔΘΑ** τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος του καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ **ΑΒΓΔ** κύκλου.

καὶ ἀνεστάτωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν **ΑΕΒ**, **ΒΖΓ**, **ΓΗΔ**, **ΔΘΑ** τριγώνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου.

τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦτες καταλείψομέν τινα απο-

τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου.

λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν **ΑΕ**, **ΕΒ**, **ΒΖ**, **ΖΓ**, **ΓΗ**, **ΗΔ**, **ΔΘ**, **ΘΑ**· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΕΒΖΓΗΔΘ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΕΒΖΓΗΔΘ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αυτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΕΒΖΓΗΔΘ** πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΕΒΖΓΗΔΘ** πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου. Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Οἱ ὑπο τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν [εἰσιν] οἱ **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ **ΚΛ**, **ΜΝ**, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ **ΑΓ**, **ΕΗ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΑΛ** κῶνος πρὸς τὸν **ΕΝ** κῶνον.

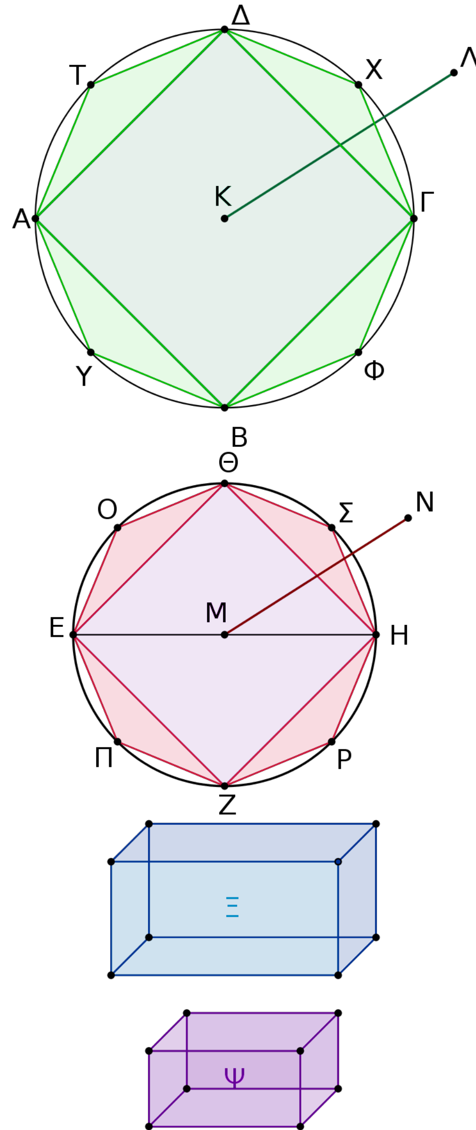
Εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΑΛ** κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΕΝ** κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον.

ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ **ΕΝ** κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ **Ψ** στερεόν· ὁ **ΕΝ** κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Ξ, **Ψ** στερεοῖς.

ἐγγεγράφθω εἰς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον τετράγωνον τὸ **ΕΖΗΘ**· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ **ΕΖΗΘ** τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης· πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος.

τετμήσθωσαν αἱ **ΕΖ**, **ΖΗ**, **ΗΘ**, **ΘΕ** περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ **Ο**, **Π**, **Ρ**, **Σ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΘΟ**, **ΟΕ**, **ΕΠ**, **ΠΖ**, **ΖΡ**, **ΡΗ**, **ΗΣ**, **ΣΘ**. ἕκαστον ἄρα τῶν **ΘΟΕ**, **ΕΠΖ**, **ΖΡΗ**, **ΗΖΘ** τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου.

ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν **ΘΟΕ**, **ΕΠΖ**, **ΖΡΗ**, **ΗΣΘ** τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου.



τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ **Ψ** στερεοῦ.

λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν **ΘΟΕ**, **ΕΠΖ**, **ΖΡΗ**, **ΗΣΘ**· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις τὸ **ΘΟΕΠΖΡΗΣ** πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ **Ξ** στερεοῦ.

ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τῷ **ΘΟΕΠΖΡΗΣ** πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ **ΔΤΑΥΒΦΓΧ**, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ **ΑΛ** κώνῳ.
ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΗ**, οὕτως τὸ **ΔΤΑΥΒΦΓΧ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΘΟΕΠΖΡΗΣ** πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΕΗ**, οὕτως ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, καὶ ὡς ἄρα ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως τὸ **ΔΤΑΥΒΦΓΧ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΘΟΕΠΖΡΗΣ** πολύγωνον.

ὡς δὲ ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΑΛ** κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ τὸ **ΔΤΑΥΒΦΓΧ** πολύγωνον πρὸς τὸ **ΘΟΕΠΖΡΗΣ** πολύγωνον,

οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΔΤΑΥΒΦΓΧ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ** σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΘΟΕΠΖΡΗΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ **ΑΛ** κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΔΤΑΥΒΦΓΧ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ** σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΘΟΕΠΖΡΗΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **ΑΛ** κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ **ΕΝ** κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ **ΑΛ** κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ **ΕΝ** κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον.

οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΑΛ** κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΕΝ** κώνου στερεόν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΕΝ** κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΑΛ** κώνου στερεόν.

Λέγω δή, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΑΛ** κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ **ΕΝ** κώνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν **ΑΛ** κῶνον.

ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν **ΑΛ** κῶνον, οὕτως ὁ **ΕΝ** κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΑΛ** κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος πρὸς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΕΝ** κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΑΛ** κώνου στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΑΛ** κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ **ΕΝ** κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως ὁ **ΑΛ** κῶνος πρὸς τὸν **ΕΝ** κῶνον.

Ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου. καὶ ὡς ἄρα ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς. Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβʹ.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ **ΒΔ**, **ΖΘ**, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ **ΚΛ**, **ΜΝ**· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν [ἐστιν] ὁ **ΑΒΓΔ**

κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ** σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν [ἐστιν] ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ **ΑΒΓΔΛ** κῶνος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘΝ** κῶνον πριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**, ἕξει ὁ **ΑΒΓΔΛ** κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ **ΕΖΗΘΝ** κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μεῖζον.

ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν **ΕΖΗΘ** κύκλον τετράγωνον τὸ **ΕΖΗΘ**· τὸ ἄρα **ΕΖΗΘ** τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ **ΕΖΗΘ** τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου.

τετμήσθωσαν δὴ αἱ **ΕΖ**, **ΖΗ**, **ΗΘ**, **ΘΕ** περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ **Ο**, **Π**, **Ρ**, **Σ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΟ**, **ΟΖ**, **ΖΠ**, **ΠΗ**, **ΗΡ**, **ΡΘ**, **ΘΣ**, **ΣΕ**. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν **ΕΟΖ**, **ΖΠΗ**, **ΗΡΘ**, **ΘΣΕ** τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν **ΕΟΖ**, **ΖΠΗ**, **ΗΡΘ**, **ΘΣΕ** τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου.

τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ **ΕΖΗΘΝ** κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ.

λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν **ΕΟ**, **ΟΖ**, **ΖΠ**, **ΠΗ**, **ΗΡ**, **ΡΘ**, **ΘΣ**, **ΣΕ**· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΕΟΖΠΗΡΘΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ.

ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον τῷ **ΕΟΖΠΗΡΘΣ** πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ **ΑΤΒΥΓΦΔΧ**, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ **ΑΤΒΥΓΦΔΧ** πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΑΤΒΥΓΦΔΧ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ** σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ **ΛΒΤ**, τῶν δὲ περειχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΕΟΖΠΗΡΘΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ **ΝΖΟ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΚΤ**, **ΜΟ**.

καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ **ΑΒΓΔΛ** κῶνος τῷ **ΕΖΗΘΝ** κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**, οὕτως ὁ **ΚΛ** ἄξων πρὸς τὸν **ΜΝ** ἄξονα. ὡς δὲ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**, οὕτως ἡ **ΒΚ** πρὸς τὴν **ΖΜ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ **ΒΚ** πρὸς τὴν **ΖΜ**, οὕτως ἡ **ΚΛ** πρὸς τὴν **ΜΝ**. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ **ΒΚ** πρὸς τὴν **ΚΛ**, οὕτως ἡ **ΖΜ** πρὸς τὴν **ΜΝ**. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ **ΒΚΛ**, **ΖΜΝ** αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΚΛ** τρίγωνον τῷ **ΖΜΝ** τριγώνῳ.

πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΚ** πρὸς τὴν **ΚΤ**, οὕτως ἡ **ΖΜ** πρὸς τὴν **ΜΟ**, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ **ΒΚΤ**, **ΖΜΟ**, ἐπειδήπερ, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΚΤ** γωνία τῶν πρὸς τῷ **Κ** κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΖΜΟ** γωνία τῶν πρὸς τῷ **Μ** κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν· ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστι τὸ **ΒΚΤ** τρίγωνον τῷ **ΖΜΟ** τριγώνῳ.

πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ **ΒΚ** πρὸς τὴν **ΚΛ**, οὕτως ἡ **ΖΜ** πρὸς τὴν **ΜΝ**, ἴση δὲ ἡ μὲν **ΒΚ** τῇ **ΚΤ**, ἡ δὲ **ΖΜ** τῇ **ΟΜ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΤΚ** πρὸς τὴν **ΚΛ**, οὕτως ἡ **ΟΜ** πρὸς τὴν **ΜΝ**. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ **ΤΚΛ**, **ΟΜΝ**· ὀρθαὶ γάρ· αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΛΚΤ** τρίγωνον τῷ **ΝΜΟ** τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΛΚΒ**, **ΝΜΖ** τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ **ΛΒ** πρὸς τὴν **ΒΚ**, οὕτως ἡ **ΝΖ** πρὸς τὴν **ΖΜ**, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΒΚΤ**, **ΖΜΟ** τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ **ΚΒ** πρὸς τὴν **ΒΤ**, οὕτως ἡ **ΜΖ** πρὸς τὴν **ΖΟ**, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ **ΛΒ** πρὸς τὴν **ΒΤ**, οὕτως ἡ **ΝΖ** πρὸς τὴν **ΖΟ**.

πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ομοιότητα τῶν **ΛΤΚ**, **ΝΟΜ** τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ **ΛΤ** πρὸς τὴν **ΤΚ**, οὕτως ἡ **ΝΟ** πρὸς τὴν **ΟΜ**, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΤΚΒ**, **ΟΜΖ** τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ **ΚΤ** πρὸς τὴν **ΤΒ**, οὕτως ἡ **ΜΟ** πρὸς τὴν **ΟΖ**, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ **ΛΤ** πρὸς τὴν **ΤΒ**, οὕτως ἡ **ΝΟ** πρὸς τὴν **ΟΖ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ **ΤΒ** πρὸς τὴν **ΒΛ**, οὕτως ἡ **ΟΖ** πρὸς τὴν **ΖΝ**. δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ **ΤΛ** πρὸς τὴν **ΛΒ**, οὕτως ἡ **ΟΝ** πρὸς τὴν **ΝΖ**.

τῶν **ΛΤΒ**, **ΝΟΖ** ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα

ἐστὶ τὰ **ΛΤΒ**, **ΝΟΖ** τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΒΚΤ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ** σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΖΜΟ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα **ΒΚΤΛ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΖΜΟΝ** πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΚ** πρὸς τὴν **ΖΜ**.

ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν **Α**, **Χ**, **Δ**, **Φ**, **Γ**, **Υ** ἐπὶ τὸ **Κ** εὐθείας καὶ ἀπὸ τῶν **Ε**, **Σ**, **Θ**, **Ρ**, **Η**, **Π** ἐπὶ τὸ **Μ** καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τοῖς κώνοις δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ **ΒΚ** ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν **ΖΜ** ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**.

καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ **ΒΚΤΛ** πυραμὶς πρὸς τὴν **ΖΜΟΝ** πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ **ΑΤΒΥΓΦΔΧ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ** σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΕΟΖΠΗΡΘΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΑΤΒΥΓΦΔΧ**, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ**, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις [μὲν] τὸ **ΕΟΖΠΗΡΘΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**.

ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βάσις [μὲν] ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ** σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ**, πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΑΤΒΥΓΦΔΧ** [πολύγωνον], κορυφὴ δὲ τὸ **Λ**, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΕΟΖΠΗΡΘΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν**· ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ**, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ **ΑΤΒΥΓΦΔΧ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ**, οὕτως τὸ Ξ [στερεὸν] πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΕΟΖΠΗΡΘΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν**. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ **ΕΟΖΠΗΡΘΣ** πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν**. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις ὁ **ΑΒΓΔ** κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ **Λ** [σημεῖον], πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεόν, οὗ βάσις μὲν ὁ **ΕΖΗΘ** κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ **Ν** σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ **ΕΖΗΘΝ** κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ **ΑΒΓΔΛ** κώνου

στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΖΘ** πρὸς τὴν **ΒΔ**.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ὁ **ΑΒΓΔΛ** κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ **ΕΖΗΘΝ** κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν **ΑΒΓΔΛ** κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΖΘ** πρὸς τὴν **ΒΔ**.

ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν **ΑΒΓΔΛ** κῶνον, οὕτως ὁ **ΕΖΗΘΝ** κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ **ΑΒΓΔΛ** κώνου στερεόν. καὶ ὁ **ΕΖΗΘΝ** ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ **ΑΒΓΔΛ** κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΖΘ** πρὸς τὴν **ΒΔ**· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

οὐκ ἄρα ὁ **ΑΒΓΔΛ** κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ **ΕΖΗΘΝ** κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ὁ **ΑΒΓΔΛ** ἄρα κῶνος πρὸς τὸν **ΕΖΗΘΝ** κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**. Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ. καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΖΘ**.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

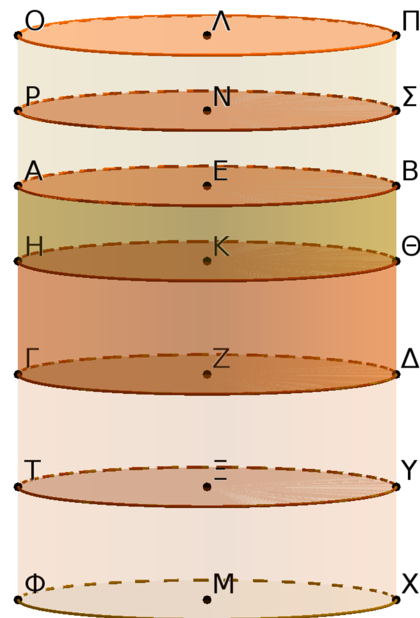
Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ **ΑΔ** ἐπιπέδῳ τῷ **ΗΘ** τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς **ΑΒ**, **ΓΔ**, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ **ΗΘ** ἐπίπεδον κατὰ τὸ **Κ** σημεῖον· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **ΒΗ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΗΔ** κύλινδρον, οὕτως ὁ **ΕΚ** ἄξων πρὸς τὸν **ΚΖ** ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ **ΕΖ** ἄξων ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ **Λ**, **Μ** σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ **ΕΚ** ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ **ΕΝ**, **ΝΛ**, τῷ δὲ **ΖΚ** ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ **ΖΞ**, **ΞΜ**, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ **ΛΜ** ἄξονος κύλινδρος ὁ **ΟΧ**, οὗ βάσεις οἱ **ΟΠ**, **ΦΧ** κύκλοι.

καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν **Ν**, **Ξ** σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς **ΑΒ**, **ΓΔ** καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ **ΟΧ** κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς **ΡΣ**, **ΤΥ** κύκλους περὶ τὰ **Ν**, **Ξ** κέντρα.

καὶ ἐπεὶ οἱ **ΛΝ**, **ΝΕ**, **ΕΚ** ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα **ΠΡ**, **ΡΒ**, **ΒΗ** κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ **ΠΡ**, **ΡΒ**, **ΒΗ** κύλινδροι ἀλλήλοις.



επεὶ οὖν οἱ **ΛΝ**, **ΝΕ**, **ΕΚ** ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ **ΠΡ**, **ΡΒ**, **ΒΗ** κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ **ΚΛ** ἄξων τοῦ **ΕΚ** ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ **ΠΗ** κύλινδρος τοῦ **ΗΒ** κυλίνδρου.

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ **ΜΚ** ἄξων τοῦ **ΚΖ** ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ **ΧΗ** κύλινδρος τοῦ **ΗΔ** κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ **ΚΛ** ἄξων τῷ **ΚΜ** ἄξονι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ **ΠΗ** κύλινδρος τῷ **ΗΧ** κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων.

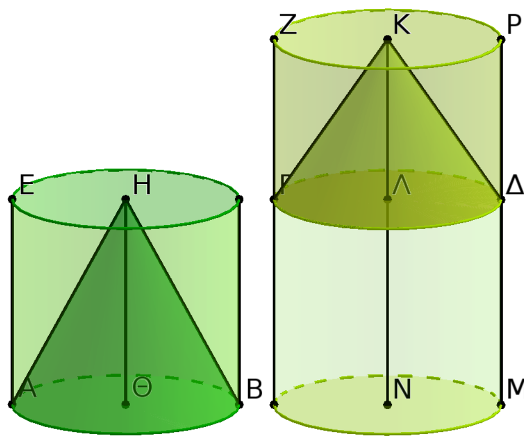
τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν **ΕΚ**, **ΚΖ**, κυλίνδρων δὲ τῶν **ΒΗ**, **ΗΔ**, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν **ΕΚ** ἄξονος καὶ τοῦ **ΒΗ** κυλίνδρου ὅ τε **ΛΚ** ἄξων καὶ ὁ **ΠΗ** κύλινδρος, τοῦ δὲ **ΚΖ** ἄξονες καὶ τοῦ **ΗΔ** κυλίνδρου ὅ τε **ΚΜ** ἄξων καὶ ὁ **ΗΧ** κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ **ΚΛ** ἄξων τοῦ **ΚΜ** ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ **ΠΗ** κύλινδρος τοῦ **ΗΧ** κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων.

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΕΚ** ἄξων πρὸς τὸν **ΚΖ** ἄξονα, οὕτως ὁ **ΒΗ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΗΔ** κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** κύκλων κύλινδροι οἱ **ΕΒ**, **ΖΔ**· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ **ΕΒ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΖΔ** κύλινδρον, οὕτως ὁ **ΗΘ** ἄξων πρὸς τὸν **ΚΛ** ἄξονα.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ **ΚΛ** ἄξων ἐπὶ τὸ **Ν** σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ **ΗΘ** ἄξονι ἴσος ὁ **ΛΝ**, καὶ περὶ ἄξονα τὸν **ΛΝ** κύλινδρος νενοήσθω ὁ **ΓΜ**.

ἐπεὶ οὖν οἱ **ΕΒ**, **ΓΜ** κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσίν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ **ΕΒ**, **ΓΜ** κύλινδροι.

καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ **ΖΜ** ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ **ΓΔ** παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΓΜ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΖΔ** κύλινδρον, οὕτως ὁ **ΛΝ** ἄξων πρὸς τὸν **ΚΛ** ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν **ΓΜ** κύλινδρος τῷ **ΕΒ** κυλίνδρῳ, ὁ δὲ **ΛΝ** ἄξων τῷ **ΗΘ** ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΕΒ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΖΔ** κύλινδρον, οὕτως ὁ **ΗΘ** ἄξων πρὸς τὸν **ΚΛ** ἄξονα.

ὡς δὲ ὁ **ΕΒ** κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ **ΑΒΗ** κῶνος πρὸς τὸν **ΓΔΚ** κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ **ΗΘ** ἄξων πρὸς τὸν **ΚΛ** ἄξονα, οὕτως ὁ **ΑΒΗ** κῶνος πρὸς τὸν **ΓΔΚ** κῶνον καὶ ὁ **ΕΒ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΖΔ** κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιεʹ.

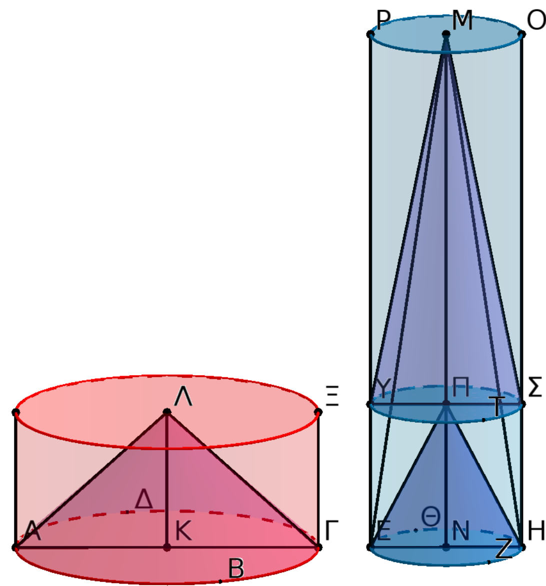
Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ **ΑΓ**, **ΕΗ**, ἄξονες δὲ οἱ **ΚΛ**, **ΜΝ**, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ **ΑΞ**, **ΕΟ** κύλινδροι.

λέγω, ὅτι τῶν **ΑΞ**, **ΕΟ** κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς

τὸ **ΚΛ** ὕψος. Τὸ γὰρ **ΛΚ** ὕψος τῷ **ΜΝ** ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον.

ἔστι δὲ καὶ ὁ **ΑΞ** κύλινδρος τῷ **ΕΟ** κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις τῇ **ΕΖΗΘ** βάσει. ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς τὸ **ΚΛ** ὕψος.



ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ **ΛΚ** ὕψος τῷ **ΜΝ** ἴσον, ἀλλ᾽ ἔστω μεῖζον τὸ **ΜΝ**, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ **ΜΝ** ὕψους τῷ **ΚΛ** ἴσον τὸ **ΠΝ**, καὶ διὰ τοῦ **Π** σημείου τετμήσθω ὁ **ΕΟ** κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ **ΤΥΣ** παραλλήλῳ τοῖς τῶν **ΕΖΗΘ**, **ΡΟ** κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ **ΝΠ** κύλινδρος νενοήσθω ὁ **ΕΣ**.

καί ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ **ΑΞ** κύλινδρος τῷ **ΕΟ** κυλίνδρῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΑΞ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΕΣ** κυλίνδρον, οὕτως ὁ **ΕΟ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΕΣ** κύλινδρον. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ **ΑΞ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΕΣ** κύλινδρον, οὕτως ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ**· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ **ΑΞ**, **ΕΣ** κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ **ΕΟ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΕΣ**, οὕτως τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς τὸ **ΠΝ** ὕψος· ὁ γὰρ **ΕΟ** κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς τὸ **ΠΝ** ὕψος. ἴσον δὲ τὸ **ΠΝ** ὕψος τῷ **ΚΛ** ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς τὸ **ΚΛ** ὕψος. τῶν ἄρα **ΑΞ**, **ΕΟ** κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν **ΑΞ**, **ΕΟ** κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς τὸ **ΚΛ** ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ **ΑΞ** κύλινδρος τῷ **ΕΟ** κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς τὸ **ΚΛ** ὕψος, ἴσον δὲ τὸ **ΚΛ** ὕψος τῷ **ΠΝ** ὕψει, ἔσται ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ** βάσιν, οὕτως τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς τὸ **ΠΝ** ὕψος. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ **ΑΒΓΔ** βάσις πρὸς τὴν **ΕΖΗΘ** βάσιν,

οὕτως ὁ **ΑΞ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΕΣ** κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ **ΜΝ** ὕψος πρὸς τὸ **ΠΝ** [ὕψος], οὕτως ὁ **ΕΟ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΕΣ** κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ **ΑΞ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΕΣ** κύλινδρον, οὕτως ὁ **ΕΟ** κύλινδρος πρὸς τὸν **ΕΣ**. ἴσος ἄρα ὁ **ΑΞ** κύλινδρος τῷ **ΕΟ** κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ **ΑΒΓΔ**, **ΕΖΗΘ** περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ **Κ**· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν **ΑΒΓΔ** πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ **Κ** κέντρου εὐθεῖα ἡ **ΒΚΔ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Η** σημείου τῇ **ΒΔ** εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΗΑ** καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ **Γ**· ἡ **ΑΓ** ἄρα ἐφάπτεται τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου.
τέμνοντες δὴ τὴν **ΒΑΔ** περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς **ΑΔ**.

λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ **ΛΔ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Λ** ἐπὶ τὴν **ΒΔ** κάθετος ἤχθω ἡ **ΛΜ** καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ **Ν**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΛΔ**, **ΔΝ**· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΛΔ** τῇ **ΔΝ**.

καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΛΝ** τῇ **ΑΓ**, ἡ δὲ **ΑΓ** ἐφάπτεται τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου, ἡ **ΛΝ** ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ **ΛΔ**, **ΔΝ** οὐκ ἐφάπτονται τοῦ **ΕΖΗΘ** κύκλου.

ἐὰν δὴ τῇ **ΛΔ** εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν **ΑΒΓΔ** κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ **ΕΖΗΘ**· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιζ′.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ **Α**· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ’ οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι’ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον.

καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων [εὐθειῶν].

ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ **ΒΓΔΕ**, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ **ΖΗΘ**, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ **ΒΔ**, **ΓΕ**, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν **ΒΓΔΕ**, **ΖΗΘ** εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν **ΒΓΔΕ** πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ **ΖΗΘ**, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ **ΒΕ** τεταρτημορίῳ αἱ **ΒΚ**, **ΚΛ**, **ΛΜ**, **ΜΕ**, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ **ΚΑ** διήχθω ἐπὶ τὸ **Ν**, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου τῷ τοῦ **ΒΓΔΕ** κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΑΞ** καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ **Ξ**, καὶ διὰ τῆς **ΑΞ** καὶ ἑκατέρας τῶν **ΒΔ**, **ΚΝ** ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν **ΒΔ**, **ΚΝ** διαμέτρων τὰ **ΒΞΔ**, **ΚΞΝ**.

καὶ ἐπεὶ ἡ **ΞΑ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ **ΒΓΔΕ** κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς **ΞΑ** ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ **ΒΓΔΕ** κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ **ΒΞΔ**, **ΚΞΝ** ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ **ΒΓΔΕ** κύκλου ἐπίπεδον.

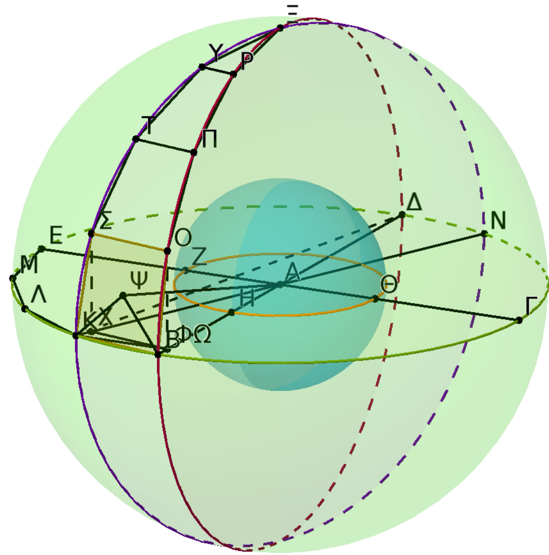
καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ **ΒΕΔ**, **ΒΞΔ**, **ΚΞΝ** ἡμικύκλια· ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν **ΒΔ**, **ΚΝ**· ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ **ΒΕ**, **ΒΞ**, **ΚΞ** τεταρτημόρια ἀλλήλοις. ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ **ΒΕ** τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς **ΒΞ**, **ΚΞ** τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς **ΒΚ**, **ΚΛ**, **ΛΜ**, **ΜΕ** εὐθείαις.

ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ **ΒΟ**, **ΟΠ**, **ΠΡ**, **ΡΞ**, **ΚΣ**, **ΣΤ**, **ΤΥ**, **ΥΞ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΣΟ**, **ΤΠ**, **ΥΡ**, καὶ ἀπὸ τῶν **Ο**, **Σ** ἐπὶ τὸ τοῦ **ΒΓΔΕ** κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς **ΒΔ**, **ΚΝ**, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν **ΒΞΔ**, **ΚΞΝ** ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι

πρὸς τὸ τοῦ **ΒΓΔΕ** κύκλου ἐπίπεδον.

πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ **ΟΦ**, **ΣΧ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΧΦ**. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς **ΒΞΔ**, **ΚΞΝ** ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ **ΒΟ**, **ΚΣ**, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ **ΟΦ**, **ΣΧ**, ἴση [ἄρα] ἐστὶν ἡ μὲν **ΟΦ** τῇ **ΣΧ**, ἡ δὲ **ΒΦ** τῇ **ΚΧ**. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ **ΒΑ** ὅλῃ τῇ **ΚΑ** ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ **ΦΑ** λοιπῇ τῇ **ΧΑ** ἐστιν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΦ** πρὸς τὴν **ΦΑ**, οὕτως ἡ **ΚΧ** πρὸς τὴν **ΧΑ**· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΧΦ** τῇ **ΚΒ**.

καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν **ΟΦ**, **ΣΧ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ **ΒΓΔΕ** κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΟΦ** τῇ **ΣΧ**. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ **ΧΦ**, **ΣΟ** ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι.



καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ **ΧΦ** τῇ **ΣΟ**, ἀλλὰ ἡ **ΧΦ** τῇ **ΚΒ** ἐστι παράλληλος, καὶ ἡ **ΣΟ** ἄρα τῇ **ΚΒ** ἐστι παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ **ΒΟ**, **ΚΣ**· τὸ **ΚΒΟΣ** ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ, ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν **ΣΟΠΤ**, **ΤΠΡΥ** τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ **ΥΡΞ** τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

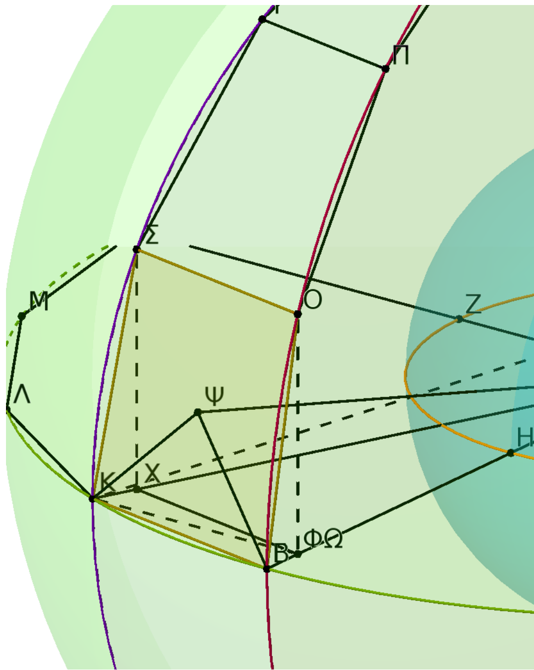
ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν **Ο**, **Σ**, **Π**, **Τ**, **Ρ**, **Υ** σημείων ἐπὶ τὸ **Α** ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον ματαξὺ τῶν **ΒΞ**, **ΚΞ** περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ **ΚΒΟΣ**, **ΣΟΠΤ**, **ΤΠΡΥ** τετράπλευρα καὶ τὸ **ΥΡΞ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Α** σημεῖον.

ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν **ΚΛ**, **ΛΜ**, **ΜΕ** πλευρῶν καθάπερ ἐπὶ τῆς **ΒΚ** τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἔτι τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν πυραμίσι περιεχόμενον, ὧν βάσιες [μὲν] τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ **ΥΡΞ** τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ **Α** σημεῖον.

Λέγω ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας

κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστιν ὁ **ΖΗΘ** κύκλος. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ **ΚΒΟΣ** τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ **ΑΨ** καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ **Ψ** σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΨΒ**, **ΨΚ**.

καὶ ἐπεὶ ἡ **ΑΨ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ **ΚΒΟΣ** τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν. ἡ **ΑΨ** ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν **ΒΨ**, **ΨΚ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῇ **ΑΚ**, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΚ**. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς **ΑΒ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΨ**, **ΨΒ**· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ **Ψ**· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΚ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΨ**, **ΨΚ**. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΨ**, **ΨΒ** ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΑΨ**, **ΨΚ**. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΨ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΨ** λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς **ΨΚ** ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ **ΒΨ** τῇ **ΨΚ**.



ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ **Ψ** ἐπὶ τὰ **Ο**, **Σ** ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν **ΒΨ**, **ΨΚ**. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ **Ψ** καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν **ΨΒ**, **ΨΚ** γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν **Ο**, **Σ**, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ **ΚΒΟΣ** τετράπλευρον.

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ **ΚΒ** τῆς **ΧΦ**, ἴση δὲ ἡ **ΧΦ** τῇ **ΣΟ**, μείζων ἄρα ἡ **ΚΒ** τῆς **ΣΟ**. ἴση δὲ ἡ **ΚΒ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΚΣ**, **ΒΟ**· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΚΣ**, **ΒΟ** τῆς **ΣΟ** μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ **ΚΒΟΣ**, καὶ ἴσαι αἱ **ΚΒ**, **ΒΟ**, **ΚΣ**, καὶ ἐλάττων ἡ **ΟΣ**, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ **ΒΨ**, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΚΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΨ** μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον.

ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Κ** ἐπὶ τὴν **ΒΦ** κάθετος ἡ **ΚΩ**. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΒΔ** τῆς **ΔΩ** ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΩ**, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν **ΔΒ**, **ΒΩ** πρὸς τὸ ὑπὸ [τῶν] **ΔΩ**, **ΩΒ**, ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς **ΒΩ** τετραγώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς **ΩΔ** παραλληλογράμμου καὶ τὸ ὑπὸ **ΔΒ**, **ΒΩ** ἄρα τοῦ ὑπὸ **ΔΩ**, **ΩΒ** ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον.

καί ἐστι τῆς **ΚΔ** ἐπιζευγνυμένης τὸ μὲν ὑπὸ **ΔΒ**, **ΒΩ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΚ**, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν **ΔΩ**, **ΩΒ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΚΩ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΚΒ** τοῦ

ἀπὸ τῆς **ΚΩ** ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς **ΚΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΨ** μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΚΩ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΨ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΑ** τῇ **ΚΑ**, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΚ**. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς **ΒΑ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΒΨ**, **ΨΑ**, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς **ΚΑ** ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν **ΚΩ**, **ΩΑ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΒΨ**, **ΨΑ** ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΚΩ**, **ΩΑ**, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς **ΚΩ** μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΨ**· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΩΑ** ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΨΑ**. μείζων ἄρα ἡ **ΑΨ** τῆς **ΑΩ**· πολλῷ ἄρα ἡ **ΑΨ** μείζων ἐστὶ τῆς **ΑΗ**. καί ἐστιν ἡ μὲν **ΑΨ** ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ **ΑΗ** ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

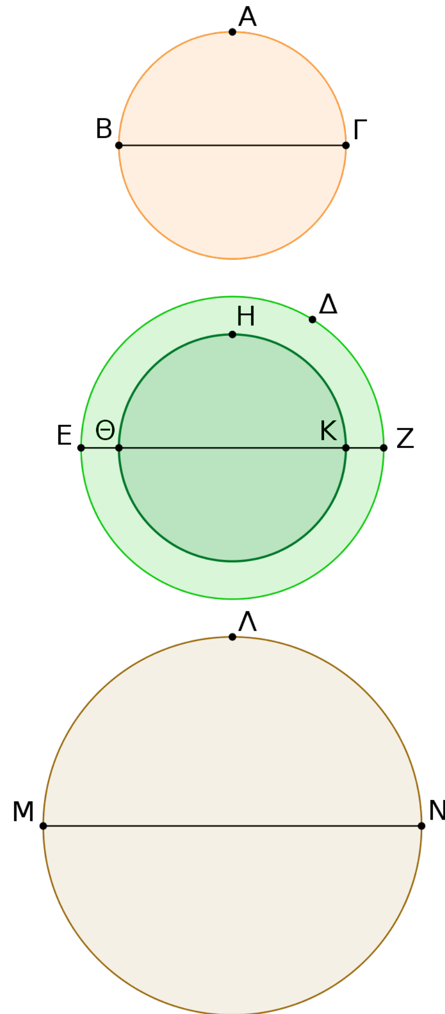
Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοιοταγεῖς πυραμίδας ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοιοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ [σφαίρᾳ] στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ **ΑΒΓ**, **ΔΕΖ**, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ **ΒΓ**, **ΕΖ**· λέγω, ὅτι ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς τὴν **ΔΕΖ** σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**.



Εἰ γὰρ μὴ ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς τὴν **ΔΕΖ** σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**, ἕξει ἄρα ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς **ΔΕΖ** σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**.
ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν **ΗΘΚ**, καὶ νενοήσθω ἡ **ΔΕΖ** τῇ **ΗΘΚ** περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν **ΔΕΖ** στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς **ΗΘΚ** κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν **ΑΒΓ** σφαῖραν τῷ ἐν τῇ **ΔΕΖ** σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ **ΑΒΓ** στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ **ΔΕΖ** στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**.

ἔχει δὲ καὶ ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς τὴν **ΗΘΚ** σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς τὴν **ΗΘΚ** σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ **ΑΒΓ** σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ **ΔΕΖ** σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ [ἄρα] ὡς ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ **ΗΘΚ** σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ **ΔΕΖ** σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΗΘΚ** σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ **ΔΕΖ** σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάτ-

των· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς **ΔΕΖ** σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** διάμετρος πρὸς τὴν **ΕΖ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ **ΔΕΖ** σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς **ΑΒΓ** σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΒΓ**.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς **ΔΕΖ** σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν **ΛΜΝ**· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ **ΛΜΝ** σφαῖρα πρὸς τὴν **ΑΒΓ** σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΕΖ** διάμετρος πρὸς τὴν **ΒΓ** διάμετρον.

ὡς δὲ ἡ **ΛΜΝ** σφαῖρα πρὸς τὴν **ΑΒΓ** σφαῖραν, οὕτως ἡ **ΔΕΖ** σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς **ΑΒΓ** σφαίρας, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ **ΛΜΝ** τῆς **ΔΕΖ**, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ ἡ **ΔΕΖ** ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς **ΑΒΓ** σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΕΖ** πρὸς τὴν **ΒΓ**· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

οὐκ ἄρα ἡ **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς **ΔΕΖ** σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα **ΑΒΓ** σφαῖρα πρὸς τὴν **ΔΕΖ** σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ **ΒΓ** πρὸς τὴν **ΕΖ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

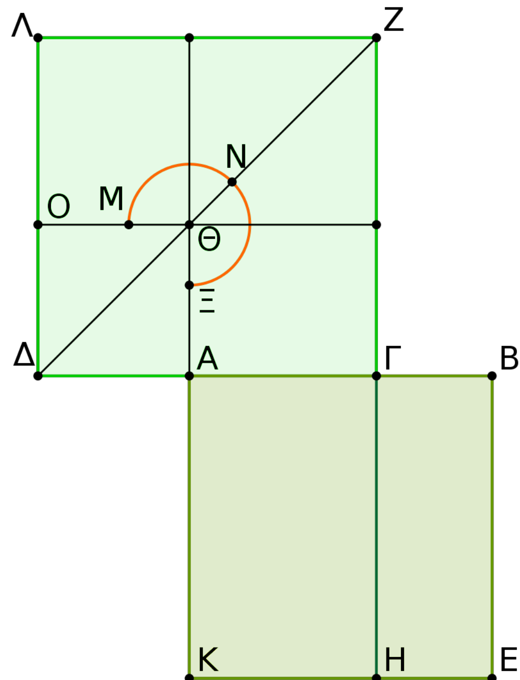
ΒΙΒΛΙΟ 13

α΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ **ΑΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ **ΑΓ**, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ **ΓΑ** εὐθεῖα ἡ **ΑΔ**, καὶ κείσθω τῆς **ΑΒ** ἡμίσεια ἡ **ΑΔ**· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΔ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΔΑ**.

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΔΓ** τετράγωνα τὰ **ΑΕ**, **ΔΖ**, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ **ΔΖ** τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ **ΖΓ** ἐπὶ τὸ **Η**. καὶ ἐπεὶ ἡ **ΑΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Γ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν **ΑΒΓ** τὸ **ΓΕ**, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τὸ **ΖΘ**· ἴσον ἄρα τὸ **ΓΕ** τῷ **ΖΘ**.



καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΒΑ** τῆς **ΑΔ**, ἴση δὲ ἡ μὲν **ΒΑ** τῇ **ΚΑ**, ἡ δὲ **ΑΔ** τῇ **ΑΘ**, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ **ΚΑ** τῆς **ΑΘ**. ὡς δὲ ἡ **ΚΑ** πρὸς τὴν **ΑΘ**, οὕτως τὸ **ΓΚ** πρὸς τὸ **ΓΘ**· διπλάσιον ἄρα τὸ **ΓΚ** τοῦ **ΓΘ**. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ **ΛΘ**, **ΘΓ** διπλάσια τοῦ **ΓΘ**. ἴσον ἄρα τὸ **ΚΓ** τοῖς **ΛΘ**, **ΘΓ**. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ **ΓΕ** τῷ **ΘΖ** ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΕ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ **ΜΝΞ** γνώμονι.

καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΒΑ** τῆς **ΑΔ**, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΔ**, τουτέστι τὸ **ΑΕ** τοῦ **ΔΘ**. ἴσον δὲ τὸ **ΑΕ** τῷ **ΜΝΞ** γνώμονι· καὶ ὁ **ΜΝΞ** ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ **ΑΟ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΔΖ** πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ **ΑΟ**. καί ἐστι τὸ μὲν **ΔΖ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**, τὸ δὲ **ΑΟ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΑ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΓΔ** πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΔΑ**.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β′.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ **ΑΒ** τμήματος ἑαυτῆς τοῦ **ΑΓ** πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ **ΑΓ** διπλῆ ἔστω ἡ **ΓΔ**· λέγω, ὅτι τῆς **ΓΔ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΓΒ**.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν **ΑΒ**, **ΓΔ** τετράγωνα τὰ **ΑΖ**, **ΓΗ**, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ **ΑΖ** τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ **ΒΕ**.

καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**, πενταπλάσιόν ἐστι τὸ **ΑΖ** τοῦ **ΑΘ**. τετραπλάσιος ἄρα ὁ **ΜΝΞ** γνώμων τοῦ **ΑΘ**. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΔΓ** τῆς **ΓΑ**, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ **ΔΓ** τοῦ ἀπὸ **ΓΑ**, τουτέστι τὸ **ΓΗ** τοῦ **ΑΘ**.

ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ **ΜΝΞ** γνώμων τετραπλάσιος τοῦ **ΑΘ**· ἴσος ἄρα ὁ **ΜΝΞ** γνώμων τῷ **ΓΗ**. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΔΓ** τῆς **ΓΑ**, ἴση δὲ ἡ μὲν **ΔΓ** τῇ **ΓΚ**, ἡ δὲ **ΑΓ** τῇ **ΓΘ** [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ **ΚΓ** τῆς **ΓΘ**], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ **ΚΒ** τοῦ **ΒΘ**.

εἰσὶ δὲ καὶ τὰ **ΛΘ**, **ΘΒ** τοῦ **ΘΒ** διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ **ΚΒ** τοῖς **ΛΘ**, **ΘΒ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ **ΜΝΞ** γνώμων ὅλῳ τῷ **ΓΗ** ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ **ΘΖ** τῷ **ΒΗ** ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν **ΒΗ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΓΔΒ**· ἴση γὰρ ἡ **ΓΔ** τῇ **ΔΗ**· τὸ δὲ **ΘΖ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΒ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΓΔΒ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΓΒ**.

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΒ**, οὕτως ἡ **ΓΒ** πρὸς τὴν **ΒΔ**. μείζων δὲ ἡ **ΔΓ** τῆς **ΓΒ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΓΒ** τῆς **ΒΔ**. τῆς **ΓΔ** ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΓΒ**.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α : Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ **ΒΓ** διπλῆ τῆς **ΓΑ**. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΑ**· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν **ΒΓ**, **ΓΑ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΑ**. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΑ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΒΑ** ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν **ΒΓ**, **ΓΑ**· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ **ΓΒ** διπλασία ἐστὶ τῆς **ΑΓ**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς **ΓΒ** διπλασίων ἐστὶ τῆς **ΓΑ**· πολλῷ γὰρ [μεῖζον] τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς **ΑΓ** διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς **ΓΒ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ **ΑΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ **ΑΓ**, καὶ τετμήσθω ἡ **ΑΓ** δίχα κατὰ τὸ **Δ**· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΑΕ**, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΑΓ** τῆς **ΔΓ**, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**, τουτέστι τὸ **ΡΣ** τοῦ **ΖΗ**. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒΓ** τὸ **ΓΕ**, τὸ ἄρα **ΓΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ **ΡΣ**. τετραπλάσιον δὲ τὸ **ΡΣ** τοῦ **ΖΗ**· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ **ΓΕ** τοῦ **ΖΗ**.

πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῇ **ΔΓ**, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ **ΘΚ** τῇ **ΚΖ**. ὥστε καὶ τὸ **ΗΖ** τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ **ΘΛ** τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ **ΗΚ** τῇ **ΚΛ**, τουτέστιν ἡ **ΜΝ** τῇ **ΝΕ**· ὥστε καὶ τὸ **ΜΖ** τῷ **ΖΕ** ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ **ΜΖ** τῷ **ΓΗ** ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ **ΓΗ** ἄρα τῷ **ΖΕ** ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΓΝ**· ὁ ἄρα **ΞΟΠ** γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ **ΓΕ**.

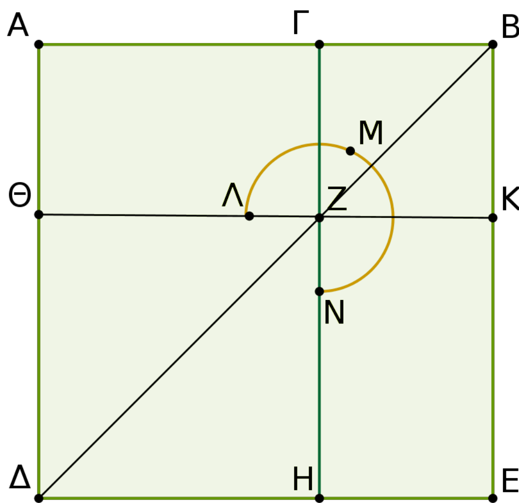
ἀλλὰ τὸ **ΓΕ** τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ **ΗΖ**· καὶ ὁ **ΞΟΠ** ἄρα γνώμων

τετραπλάσιός ἐστι τοῦ **ΖΗ** τετραγώνου. ὁ **ΞΟΠ** ἄρα γνώμων καὶ τὸ **ΖΗ** τετράγωνον πενταπλάσιός ἐστι τοῦ **ΖΗ**. ἀλλὰ ὁ **ΞΟΠ** γνώμων καὶ τὸ **ΖΗ** τετράγωνόν ἐστι τὸ **ΔΝ**. καί ἐστι τὸ μὲν **ΔΝ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΒ**, τὸ δὲ **ΗΖ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΔΒ** πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ **Γ**, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ **ΑΓ**· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΑ**.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΑΔΕΒ**, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ **ΑΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Γ**, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΑΓ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΓ**.

καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν **ΑΒΓ** τὸ **ΑΚ**, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τὸ **ΘΗ**· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΚ** τῷ **ΘΗ**. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ **ΑΖ** τῷ **ΖΕ**, κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΓΚ**· ὅλον ἄρα τὸ **ΑΚ** ὅλῳ τῷ **ΓΕ** ἐστιν ἴσον· τὰ ἄρα **ΑΚ**, **ΓΕ** τοῦ **ΑΚ** ἐστι διπλάσια. ἀλλὰ τὰ **ΑΚ**, **ΓΕ** ὁ **ΛΜΝ** γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ **ΓΚ** τετράγωνον· ὁ ἄρα **ΛΜΝ** γνώμων καὶ τὸ **ΓΚ** τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ **ΑΚ**.

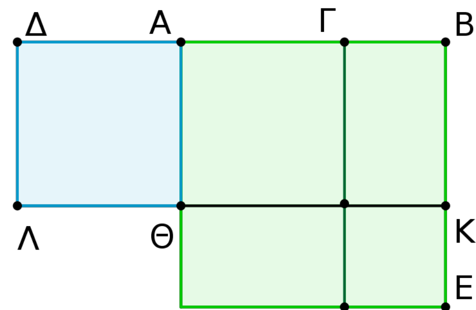
ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ **ΑΚ** τῷ **ΘΗ** ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα **ΛΜΝ** γνώμων καὶ [τὸ **ΓΚ** τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ **ΘΗ**· ὥστε ὁ **ΛΜΝ** γνώμων καὶ] τὰ **ΓΚ**, **ΘΗ** τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ **ΘΗ** τετραγώνου. καί ἐστιν ὁ [μὲν] **ΛΜΝ** γνώμων καὶ τὰ **ΓΚ**, **ΘΗ** τετράγωνα ὅλον τὸ **ΑΕ** καὶ τὸ **ΓΚ**, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τετράγωνα, τὸ δὲ **ΗΘ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετράγωνον.

τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ** τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ **ΑΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ **ΑΓ**, καὶ τῇ **ΑΓ** ἴση [κείσθω] ἡ **ΑΔ**. λέγω, ὅτι ἡ **ΔΒ** εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Α**, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ **ΑΒ**.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τετράγωνον τὸ **ΑΕ**, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἡ **ΑΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Γ**, τὸ ἄρα ὑπὸ **ΑΒΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ **ΑΓ**. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ **ΑΒΓ** τὸ **ΓΕ**, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τὸ **ΓΘ**· ἴσον ἄρα τὸ **ΓΕ** τῷ **ΘΓ**.

ἀλλὰ τῷ μὲν **ΓΕ** ἴσον ἐστὶ τὸ **ΘΕ**, τῷ δὲ **ΘΓ** ἴσον τὸ **ΔΘ**· καὶ τὸ **ΔΘ** ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ **ΘΕ** [κοινὸν προσκείσθω τὸ **ΘΒ**]. ὅλον ἄρα τὸ **ΔΚ** ὅλῳ τῷ **ΑΕ** ἐστιν ἴσον. καί ἐστι τὸ μὲν **ΔΚ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΒΔ**, **ΔΑ**· ἴση γὰρ ἡ **ΑΔ** τῇ **ΔΛ**· τὸ δὲ **ΑΕ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΒΔΑ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΒ**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΑ**, οὕτως ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**. μείζων δὲ ἡ **ΔΒ** τῆς **ΒΑ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΒΑ** τῆς **ΑΔ**.

Ἡ ἄρα **ΔΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμηται κατὰ τὸ **Α**, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΑΒ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς΄.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ **ΑΒ** καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ **Γ**, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ **ΑΓ**· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ **ΒΑ**, καὶ κείσθω τῆς **ΒΑ** ἡμίσεια ἡ **ΑΔ**. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ **ΑΒ** τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ **Γ**, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ **ΑΓ** πρόσκειται ἡ **ΑΔ** ἡμίσεια οὖσα τῆς

ΑΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ **ΓΔ** τοῦ ἀπὸ **ΔΑ** πενταπλάσιόν ἐστιν.

τὸ ἄρα ἀπὸ **ΓΔ** πρὸς τὸ ἀπὸ **ΔΑ** λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ **ΓΔ** τῷ ἀπὸ **ΔΑ**. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ **ΔΑ**· ῥητὴ γὰρ [ἐστιν] ἡ **ΔΑ** ἡμίσεια οὖσα τῆς **ΑΒ** ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ **ΓΔ**· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ **ΓΔ**.

καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ **ΓΔ** πρὸς τὸ ἀπὸ **ΔΑ** λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ **ΓΔ** τῇ **ΔΑ**· αἱ **ΓΔ**, **ΔΑ** ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΓ**.

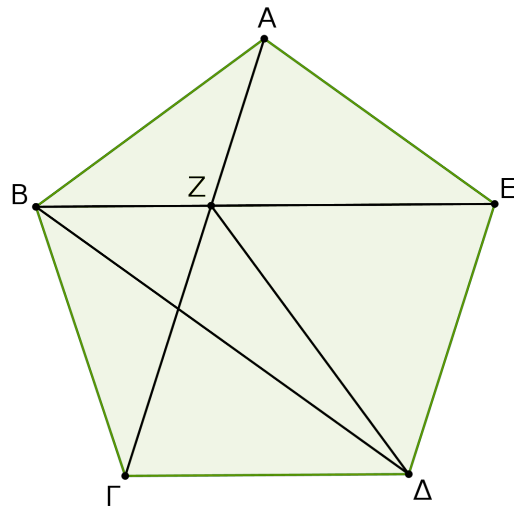
πάλιν, ἐπεὶ ἡ **ΑΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΑΓ**, τὸ ἄρα ὑπὸ **ΑΒ**, **ΒΓ** τῷ ἀπὸ **ΑΓ** ἴσον ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΓ** ἀποτομῆς παρὰ τὴν **ΑΒ** ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν **ΒΓ**. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ **ΓΒ**. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ **ΓΑ** ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ **ΑΒΓΔΕ** αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΑΓ**, **ΒΕ**, **ΖΔ**. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΓΒ**, **ΒΑ** δυσὶ ταῖς **ΒΑ**, **ΑΕ** ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΓΒΑ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΑΕ** ἐστιν ἴση, βάσις ἄρα ἡ **ΑΓ** βάσει τῇ **ΒΕ** ἐστιν ἴση, καὶ τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον τῷ **ΑΒΕ** τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ **ΒΓΑ** τῇ ὑπὸ **ΒΕΑ**, ἡ δὲ ὑπὸ **ΑΒΕ** τῇ ὑπὸ **ΓΑΒ**· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ **ΑΖ** πλευρᾷ τῇ **ΒΖ** ἐστιν ἴση.

ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ **ΑΓ** ὅλῃ τῇ **ΒΕ** ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ **ΖΓ** λοιπῇ τῇ **ΖΕ** ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΓΔ** τῇ **ΔΕ**

ἴση. δύο δὴ αἱ **ΖΓ**, **ΓΔ** δυσὶ ταῖς **ΖΕ**, **ΕΔ** ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ **ΖΔ**· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΖΓΔ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΖΕΔ** ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΓΑ** τῇ ὑπὸ **ΑΕΒ** ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ** ὅλῃ τῇ ὑπὸ **ΑΕΔ** ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ **ΒΓΔ** ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς **Α**, **Β** γωνίαις· καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΕΔ** ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς **Α**, **Β** γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΔΕ** γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς **Α**, **Β**, **Γ** γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς **Α**, **Γ**, **Δ** σημείοις· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ **ΒΔ**. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΒΑ**, **ΑΕ** δυσὶ ταῖς **ΒΓ**, **ΓΔ** ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ **ΒΕ** βάσει τῇ **ΒΔ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον τῷ **ΒΓΔ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΕΒ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΔΒ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΕΔ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΒΔΕ** ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ **ΒΕ** πλευρᾷ τῇ **ΒΔ** ἐστιν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΕΔ** γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ **ΓΔΕ** ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΓΔΕ** ταῖς πρὸς τοῖς **Α**, **Γ** γωνίαις ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΕΔ** ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς **Α**, **Γ** ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς **Α**, **Γ**, **Δ** γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

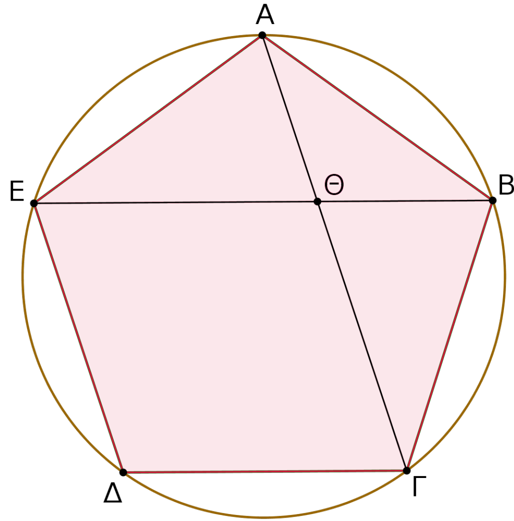
η'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ **ΑΒΓ ΔΕ** δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς **Α**, **Β** ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ **ΑΓ**, **ΒΕ** τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ **Θ** σημεῖον· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Θ** σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ **ΑΒΓΔΕ** πεντάγωνον κύκλος ὁ **ΑΒΓΔΕ**. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ **ΕΑ**, **ΑΒ** δυσὶ ταῖς **ΑΒ**, **ΒΓ** ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ **ΒΕ** βάσει τῇ **ΑΓ** ἴση ἐστίν, καὶ τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον τῷ **ΑΒΓ** τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΒΑΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΒΕ**· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΘΕ** τῆς ὑπὸ **ΒΑΘ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ **ΕΑΓ** τῆς ὑπὸ **ΒΑΓ** διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια ἡ **ΕΔΓ** περιφερείας τῆς **ΓΒ** ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΘΑΕ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΘΕ**· ὥστε καὶ ἡ **ΘΕ** εὐθεῖα τῇ **ΕΑ**, τουτέστι τῇ **ΑΒ** ἐστιν ἴση.



καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΒΑ** εὐθεῖα τῇ **ΑΕ**, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** τῇ ὑπὸ **ΑΕΒ**. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ** τῇ ὑπὸ **ΒΑΘ** ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΕΑ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΒΑΘ** ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε **ΑΒΕ** καὶ τοῦ **ΑΒΘ** ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΑΒΕ**· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΑΕ** γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΑΘΒ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΕ** τρίγωνον τῷ **ΑΒΘ** τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΕΒ** πρὸς τὴν **ΒΑ**, οὕτως ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΘ**. ἴση δὲ ἡ **ΒΑ** τῇ **ΕΘ**· ὡς ἄρα ἡ **ΒΕ** πρὸς τὴν **ΕΘ**, οὕτως ἡ **ΕΘ** πρὸς τὴν **ΘΒ**. μείζων δὲ ἡ **ΒΕ** τῆς **ΕΘ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΕΘ** τῆς **ΘΒ**. ἡ **ΒΕ** ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Θ**, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ **ΘΕ** ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ **ΑΓ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Θ**, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ **ΓΘ** ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θʹ.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, καὶ τῶν εἰς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ **ΒΓ**, ἑξαγώνου δὲ ἡ **ΓΔ**, καὶ ἔστωσαν ἐπ᾽ εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ **ΒΔ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ **ΓΔ**.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Ε** σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΒ**, **ΕΓ**, **ΕΔ**, καὶ διήχθω ἡ **ΒΕ** ἐπὶ τὸ **Α**. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ **ΒΓ**, πενταπλασίων ἄρα ἡ **ΑΓΒ** περιφέρεια τῆς **ΒΓ** περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ **ΑΓ** περιφέρεια τῆς **ΓΒ**.

ὡς δὲ ἡ **ΑΓ** περιφέρεια πρὸς τὴν **ΓΒ**, οὕτως ἡ ὑπὸ **ΑΕΓ** γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ **ΓΕΒ**· τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΕΓ** τῆς ὑπὸ **ΓΕΒ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ὑπὸ **ΕΒΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΕΓΒ**, ἡ ἄρα ὑπὸ **ΑΕΓ** γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ **ΕΓΒ**. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΕΓ** εὐθεῖα τῇ **ΓΔ**· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν **ΑΒΓ** κύκλον [ἐγγραφομένου]· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ **ΓΕΔ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΓΔΕ** γωνίᾳ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΕΓΒ** γωνία τῆς ὑπὸ **ΕΔΓ**.

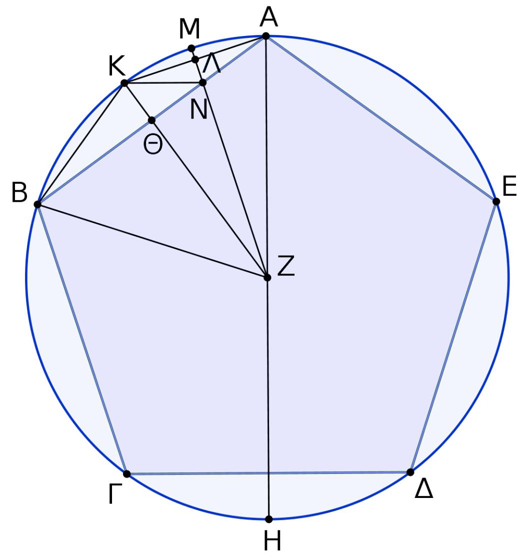
ἀλλὰ τῆς ὑπὸ **ΕΓΒ** διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ **ΑΕΓ**· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΕΓ** τῆς ὑπὸ **ΕΔΓ**. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ **ΒΕΓ** τετραπλασία ἡ ὑπὸ **ΑΕΓ**· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ **ΕΔΓ** τῇ ὑπὸ **ΒΕΓ**. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε **ΒΕΓ** καὶ τοῦ **ΒΕΔ**, ἡ ὑπὸ **ΕΒΔ** γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΕΔ** τῇ ὑπὸ **ΕΓΒ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΕΒΔ** τρίγωνον τῷ **ΕΒΓ** τριγώνῳ.

ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΕ**, οὕτως ἡ **ΕΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**. ἴση δὲ ἡ **ΕΒ** τῇ **ΓΔ**. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΒΔ** πρὸς τὴν **ΔΓ**, οὕτως ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΒ**. μείζων δὲ ἡ **ΒΔ** τῆς **ΔΓ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΔΓ** τῆς **ΓΒ**. ἡ **ΒΔ** ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται [κατὰ τὸ **Γ**], καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστιν ἡ **ΔΓ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι′.

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓΔΕ**, καὶ εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ **ΑΒΓΔΕ**. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ **ΑΒΓΔΕ** πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν τῶν εἰς τὸν **ΑΒΓΔΕ** κύκλον ἐγγραφομένων.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Ζ** σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ **ΑΖ** διήχθω ἐπὶ τὸ **Η** σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΖΒ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὴν **ΑΒ** κάθετος ἤχθω ἡ **ΖΘ**, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ **Κ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΚ**, **ΚΒ**, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ **Ζ** ἐπὶ τὴν **ΑΚ** κάθετος ἤχθω ἡ **ΖΛ**, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ **Μ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΚΝ**.

ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΒΓΗ** περιφέρεια τῇ **ΑΕΔΗ** περιφερείᾳ, ὧν ἡ **ΑΒΓ** τῇ **ΑΕΔ** ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ **ΓΗ** περιφέρεια λοιπῇ τῇ **ΗΔ** ἐστιν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ **ΓΔ**· δεκαγώνου ἄρα ἡ **ΓΗ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΖΑ** τῇ **ΖΒ**, καὶ κάθετος ἡ **ΖΘ**, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ **ΑΖΚ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΚΖΒ**. ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ **ΑΚ** τῇ **ΚΒ** ἐστιν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ **ΑΒ** περιφέρεια τῆς **ΒΚ** περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ **ΑΚ** εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΑΚ** τῆς **ΚΜ** ἐστι διπλῆ.

καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΑΒ** περιφέρεια τῆς **ΒΚ** περιφερείας, ἴση δὲ ἡ **ΓΔ** περιφέρεια τῇ **ΑΒ** περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ **ΓΔ** περιφέρεια τῆς **ΒΚ** περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ **ΓΔ** περιφέρεια καὶ τῆς **ΓΗ** διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ **ΓΗ** περιφέρεια τῇ **ΒΚ** περιφερείᾳ.

ἀλλὰ ἡ **ΒΚ** τῆς **ΚΜ** ἐστι διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ **ΚΑ**· καὶ ἡ **ΓΗ** ἄρα τῆς **ΚΜ** ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ **ΓΒ** περιφέρεια τῆς **ΒΚ** περιφερείας ἐστὶ διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ **ΓΒ** περιφέρεια τῇ **ΒΑ**. καὶ ὅλη ἄρα ἡ **ΗΒ** περιφέρεια τῆς **ΒΜ** ἐστι διπλῆ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ **ΗΖΒ** γωνίας τῆς ὑπὸ **ΒΖΜ** [ἐστι] διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ **ΗΖΒ** καὶ τῆς ὑπὸ **ΖΑΒ** διπλῆ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ **ΖΑΒ** τῇ ὑπὸ **ΑΒΖ**. καὶ ἡ ὑπὸ **ΒΖΝ** ἄρα τῇ ὑπὸ **ΖΑΒ** ἐστιν ἴση.

κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε **ΑΒΖ** καὶ τοῦ **ΒΖΝ**, ἡ ὑπὸ **ΑΒΖ** γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΖΒ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΒΝΖ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΒΖ** τρίγωνον τῷ **ΒΖΝ** τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΑΒ** εὐθεῖα πρὸς τὴν **ΒΖ**, οὕτως ἡ **ΖΒ** πρὸς τὴν **ΒΝ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒΝ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ **ΒΖ**.

πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΛ** τῇ **ΛΚ**, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΛΝ**, βάσις ἄρα ἡ **ΚΝ** βάσει τῇ **ΑΝ** ἐστιν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΛΚΝ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΛΑΝ** ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ **ΛΑΝ** τῇ ὑπὸ **ΚΒΝ** ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ **ΛΚΝ**

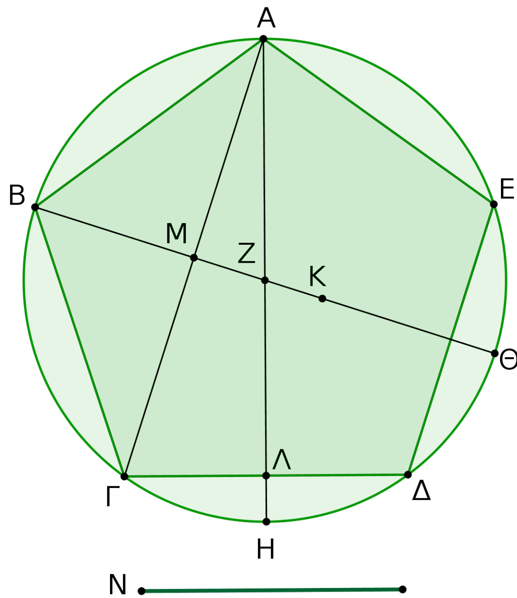
ἄρα τῇ ὑπὸ **ΚΒΝ** ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε **ΑΚΒ** καὶ τοῦ **ΑΚΝ** ἡ πρὸς τῷ **Α**. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΚΒ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΚΝΑ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΚΒΑ** τρίγωνον τῷ **ΚΝΑ** τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΑ** εὐθεῖα πρὸς τὴν **ΑΚ**, οὕτως ἡ **ΚΑ** πρὸς τὴν **ΑΝ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΒΑΝ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΚ**. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΒΝ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΖ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΑΒΝ** μετὰ τοῦ ὑπὸ **ΒΑΝ**, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ**, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΒΖ** μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΚ**. καί ἐστιν ἡ μὲν **ΒΑ** πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ **ΒΖ** ἑξαγώνου, ἡ δὲ **ΑΚ** δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια΄.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν **ΑΒΓΔΕ** ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ **ΑΒΓΔΕ**· λέγω, ὅτι ἡ τοῦ [**ΑΒΓΔΕ**] πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Ζ** σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΖ**, **ΖΒ** καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ **Η**, **Θ** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΑΓ**, καὶ κείσθω τῆς **ΑΖ** τέταρτον μέρος ἡ **ΖΚ**.

ῥητὴ δὲ ἡ **ΑΖ**· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ **ΖΚ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΒΖ** ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ **ΒΚ** ῥητή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓΗ** περιφέρεια τῇ **ΑΔΗ** περιφερείᾳ, ὧν ἡ **ΑΒΓ** τῇ **ΑΕΔ** ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ **ΓΗ** λοιπῇ τῇ **ΗΔ** ἐστιν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν **ΑΔ**, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ **Λ** γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ **ΓΔ** τῆς **ΓΛ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ **Μ** ὀρθαί εἰσιν, καὶ διπλῆ ἡ **ΑΓ** τῆς **ΓΜ**.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ **ΑΛΓ** γωνία τῇ ὑπὸ **ΑΜΖ**, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε **ΑΓΛ** καὶ τοῦ **ΑΜΖ** ἡ ὑπὸ **ΛΑΓ**, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΓΛ** λοιπῇ τῇ ὑπὸ **ΜΖΑ** ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΑΓΛ** τρίγωνον τῷ **ΑΜΖ**

τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ **ΛΓ** πρὸς **ΓΑ**, οὕτως ἡ **ΜΖ** πρὸς **ΖΑ**· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς **ΛΓ** διπλῆ πρὸς τὴν **ΓΑ**, οὕτως ἡ τῆς **ΜΖ** διπλῆ πρὸς τὴν **ΖΑ**. ὡς δὲ ἡ τῆς **ΜΖ** διπλῆ πρὸς τὴν **ΖΑ**, οὕτως ἡ **ΜΖ** πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς **ΖΑ**· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς **ΛΓ** διπλῆ πρὸς τὴν **ΓΑ**, οὕτως ἡ **ΜΖ** πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς **ΖΑ**. καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεα· ὡς ἄρα ἡ τῆς **ΛΓ** διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς **ΓΑ**, οὕτως ἡ **ΜΖ** πρὸς τὸ τέταρτον τῆς **ΖΑ**.

καί ἐστι τῆς μὲν **ΛΓ** διπλῆ ἡ **ΔΓ**, τῆς δὲ **ΓΑ** ἡμίσεια ἡ **ΓΜ**, τῆς δὲ **ΖΑ** τέταρτον μέρος ἡ **ΖΚ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΔΓ** πρὸς τὴν **ΓΜ**, οὕτως ἡ **ΜΖ** πρὸς τὴν **ΖΚ**. συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ **ΔΓΜ** πρὸς τὴν **ΓΜ**, οὕτως ἡ **ΜΚ** πρὸς **ΚΖ**· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς **ΔΓΜ** πρὸς τὸ ἀπὸ **ΓΜ**, οὕτως τὸ ἀπὸ **ΜΚ** πρὸς τὸ ἀπὸ **ΚΖ**.

καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς **ΑΓ**, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ **ΔΓ**, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καί ἐστιν ὅλης τῆς **ΑΓ** ἡμίσεια ἡ **ΓΜ**, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΔΓΜ** ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΜ**. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΓΜ** ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΜ**, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς **ΜΚ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΚΖ**· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΜΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΖ**.

ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς **ΚΖ**· ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΜΚ**· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΜΚ** [δυνάμει μόνον]. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ **ΒΖ** τῆς **ΖΚ**, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΚ** τῆς **ΚΖ**· εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΖ**. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς **ΜΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΖ**· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΜ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΒΚ** πρὸς τὸ ἀπὸ **ΚΜ** λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΚ** τῇ **ΚΜ** μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν. αἱ **ΒΚ**, **ΚΜ** ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἀποτομή· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΜΒ**, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ **ΜΚ**. λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη.

ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΜ**, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς **Ν**· ἡ **ΒΚ** ἄρα τῆς **ΚΜ** μεῖζον δύναται τῇ **Ν**. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ **ΚΖ** τῇ **ΖΒ**, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ **ΚΒ** τῇ **ΖΒ**. ἀλλὰ ἡ **ΒΖ** τῇ **ΒΘ** σύμμετρός ἐστιν· καὶ ἡ **ΒΚ** ἄρα τῇ **ΒΘ** σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΜ**, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΒΚ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΚΜ** λόγον ἔχει, ὃν **ε** πρὸς ἕν. ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΚ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **Ν** λόγον ἔχει, ὅν **ε** πρὸς **δ**. οὐχ ὃν τετράγωνος

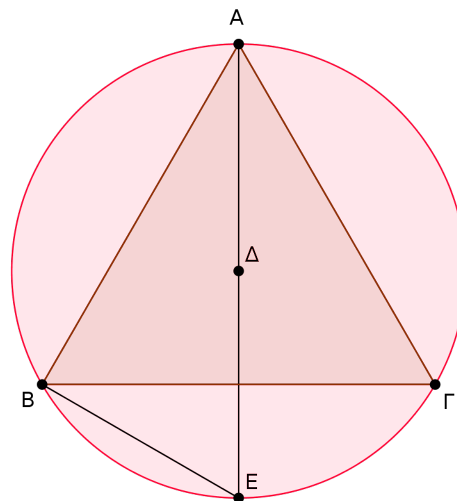
πρὸς τετράγωνον· ἀσύμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΚ** τῇ **Ν**· ἡ **ΒΚ** ἄρα τῆς **ΚΜ** μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ **ΒΚ** τῆς προσαρμοζούσης τῆς **ΚΜ** μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ὅλη ἡ **ΒΚ** σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ **ΒΘ**, ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ **ΜΒ**. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν **ΘΒΜ** ἡ **ΑΒ** διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς **ΑΘ** ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ **ΑΒΘ** τρίγωνον τῷ **ΑΒΜ** τριγώνῳ καὶ εἶναι ὡς τὴν **ΘΒ** πρὸς τὴν **ΒΑ**, οὕτως τὴν **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΜ**. Ἡ ἄρα **ΑΒ** τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβʹ.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ **ΑΒΓ**, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ **ΑΒΓ**· λέγω, ὅτι τοῦ **ΑΒΓ** τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου.



Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου τὸ **Δ**, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ **ΑΔ** διήχθω ἐπὶ τὸ **Ε**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΒΕ**.

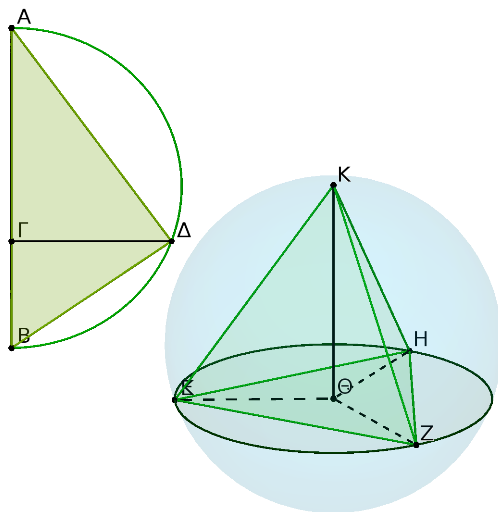
καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ **ΑΒΓ** τρίγωνον, ἡ **ΒΕΓ** ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ **ΑΒΓ** κύκλου περιφερείας. ἡ ἄρα **ΒΕ** περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΕ** εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ **ΔΕ**. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΑΕ** τῆς **ΔΕ**, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΔ**, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΕ**. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΕ** τοῖς ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΕ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΑΒ**, **ΒΕ** τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΕ**. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ **ΒΕ**. ἴση δὲ ἡ **ΒΕ** τῇ **ΔΕ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΔΕ**.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ κύκλου]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ΄.

Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ **ΑΒ**, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ **Γ** σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν **ΑΓ** τῆς **ΓΒ**· καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς **ΑΒ** ἡμικύκλιον τὸ **ΑΔΒ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Γ** σημείου τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΓΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΑ**· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ **ΕΖΗ** ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ **ΔΓ**, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν **ΕΖΗ** κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ **ΕΖΗ**· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ **Θ** σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΕΘ**, **ΘΖ**, **ΘΗ**· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ **Θ** σημείου τῷ τοῦ **ΕΖΗ** κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΘΚ**, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς **ΘΚ** τῇ **ΑΓ** εὐθείᾳ ἴση ἡ **ΘΚ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΚΕ**, **ΚΖ**, **ΚΗ**.



καὶ ἐπεὶ ἡ **ΚΘ** ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ **ΕΖΗ** κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ **ΕΖΗ** κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν **ΘΕ**, **ΘΖ**, **ΘΗ**· ἡ **ΘΚ** ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν **ΘΕ**, **ΘΖ**, **ΘΗ** ὀρθή ἐστιν.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν **ΑΓ** τῇ **ΘΚ**, ἡ δὲ **ΓΔ** τῇ **ΘΕ**, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ **ΔΑ** βάσει τῇ **ΚΕ** ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν **ΚΖ**, **ΚΗ** τῇ **ΔΑ** ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ **ΚΕ**, **ΚΖ**, **ΚΗ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΑΓ** τῆς **ΓΒ**, τριπλῆ ἄρα ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΓ**. ὡς δὲ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΔ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΔ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**.

ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΕ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΘ** τριπλάσιον, καί ἐστιν ἴση ἡ **ΔΓ** τῇ **ΕΘ**· ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΔΑ** τῇ **ΕΖ**. ἀλλὰ ἡ **ΔΑ** ἑκάστῃ τῶν **ΚΕ**, **ΚΖ**, **ΚΗ** ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν **ΕΖ**, **ΖΗ**, **ΗΕ** ἑκάστῃ τῶν **ΚΕ**, **ΚΖ**, **ΚΗ** ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ **ΕΖΗ**, **ΚΕΖ**, **ΚΖΗ**, **ΚΕΗ**. πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν

ἔστι τὸ **ΕΖΗ** τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ **Κ** σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ **ΚΘ** εὐθεῖα ἡ **ΘΛ**, καὶ κείσθω τῇ **ΓΒ** ἴση ἡ **ΘΛ**. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΓ** πρὸς τὴν **ΓΔ**, οὕτως ἡ **ΓΔ** πρὸς τὴν **ΓΒ**, ἴση δὲ ἡ μὲν **ΑΓ** τῇ **ΚΘ**, ἡ δὲ **ΓΔ** τῇ **ΘΕ**, ἡ δὲ **ΓΒ** τῇ **ΘΛ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΚΘ** πρὸς τὴν **ΘΕ**, οὕτως ἡ **ΕΘ** πρὸς τὴν **ΘΛ**· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΚΘ**, **ΘΛ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΘ**. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ **ΚΘΕ**, **ΕΘΛ** γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς **ΚΛ** γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ **Ε** [ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν **ΕΛ**, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ **ΛΕΚ** γωνία διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ **ΕΛΚ** τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν **ΕΛΘ**, **ΕΘΚ** τριγώνων].

ἐὰν δὴ μενούσης τῆς **ΚΛ** περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν **Ζ**, **Η** σημείων ἐπιζευγνυμένων τῶν **ΖΛ**, **ΛΗ** καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς **Ζ**, **Η** γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ. ἡ γὰρ **ΚΛ** τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ **ΑΒ**, ἐπειδήπερ τῇ μὲν **ΑΓ** ἴση κεῖται ἡ **ΚΘ**, τῇ δὲ **ΓΒ** ἡ **ΘΛ**.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

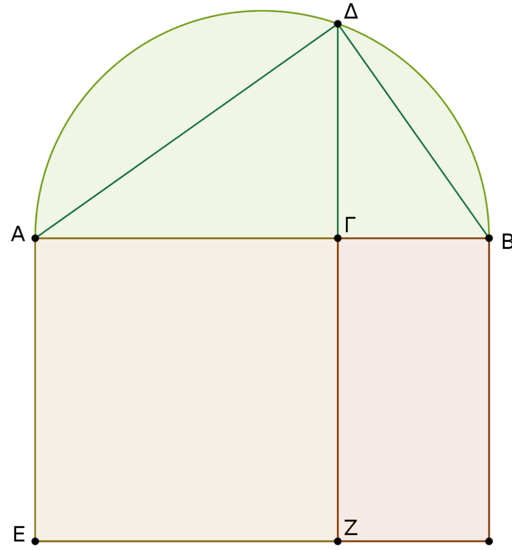
Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΑΓ** τῆς **ΓΒ**, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΓ**· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΑ** τῆς **ΑΓ**. ὡς δὲ ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΔ** [ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς **ΔΒ** ἐστιν ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως ἡ **ΔΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ** διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΔΑΒ**, **ΔΑΓ** τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας]. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΔ**. καί ἐστιν ἡ μὲν **ΒΑ** ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ **ΑΔ** ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α : Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΒ**, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς **ΑΓ** τετράγωνον τὸ **ΕΓ**, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ **ΖΒ** παραλληλόγραμμον.

ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ **ΔΑΒ** τρίγωνον τῷ **ΔΑΓ** τριγώνῳ ἐστὶν ὡς ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως ἡ **ΔΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΔ**.



καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὸ **ΕΒ** πρὸς τὸ **ΒΖ**, καί ἐστι τὸ μὲν **ΕΒ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ**· ἴση γὰρ ἡ **ΕΑ** τῇ **ΑΓ**· τὸ δὲ **ΒΖ** τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**, ὡς ἄρα ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ**.

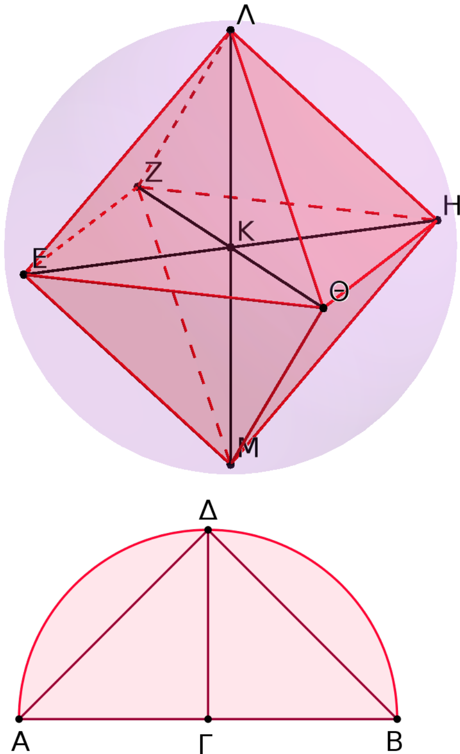
καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν **ΒΑ**, **ΑΓ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΑΔ**, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν **ΑΓΒ** ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**· ἡ γὰρ **ΔΓ** κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν **ΑΓ**, **ΓΒ** μέση ἀνάλογόν ἐστι διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ **ΑΔΒ**. ὡς ἄρα ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΔ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΓ**· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδʹ.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ **ΑΒ**, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ **Γ**, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς **ΑΒ** ἡμικύκλιον τὸ **ΑΔΒ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Γ** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΓΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΒ**, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ **ΕΖΗΘ** ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ **ΔΒ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΘΖ**, **ΕΗ**, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ **Κ** σημείου τῷ τοῦ **ΕΖΗΘ** τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ **ΚΛ** καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ **ΚΜ**, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν **ΚΛ**, **ΚΜ** μιᾷ τῶν **ΕΚ**, **ΖΚ**, **ΗΚ**, **ΘΚ** ἴση ἑκατέρα τῶν **ΚΛ**, **ΚΜ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΛΕ**, **ΛΖ**, **ΛΗ**, **ΛΘ**, **ΜΕ**, **ΜΖ**, **ΜΗ**, **ΜΘ**.

καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΚΕ** τῇ **ΚΘ**, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΕΚΘ** γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΘΕ** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΚ**. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΛΚ** τῇ **ΚΕ**, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΛΚΕ** γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΛ** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ **ΕΚ**.



ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΘΕ** διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΚ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΛΕ** ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς **ΕΘ**· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΛΕ** τῇ **ΕΘ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΛΘ** τῇ **ΘΕ** ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΛΕΘ** τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ **ΕΖΗΘ** τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ **Λ**, **Μ** σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ **ΛΚ**, **ΚΜ**, **ΚΕ** ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς **ΛΜ** γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ **Ε**. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς **ΛΜ** περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν **Ζ**, **Η**, **Θ** σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ.

ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΛΚ** τῇ **ΚΜ**, κοινὴ δὲ ἡ **ΚΕ**, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ **ΛΕ** βάσει τῇ **ΕΜ** ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΛΕΜ** γωνία· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΛΜ** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΛΕ**. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΒ**, διπλασία ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΓ**. ὡς δὲ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**.

ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΛΜ** διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΛΕ**. καί ἐστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΒ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΛΕ**· ἴση γὰρ κεῖται ἡ **ΕΘ** τῇ **ΔΒ**. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τῷ ἀπὸ τῆς **ΛΜ**· ἴση ἄρα ἡ **ΑΒ** τῇ **ΛΜ**. καί ἐστιν ἡ **ΑΒ** ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ **ΛΜ** ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

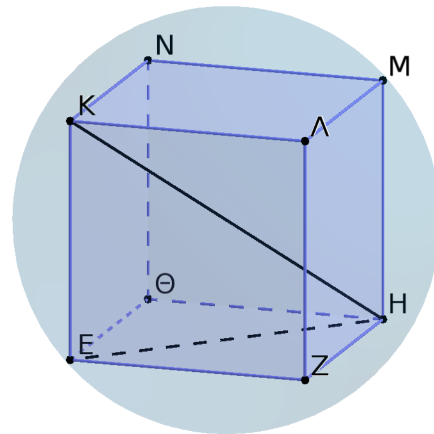
Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε′.

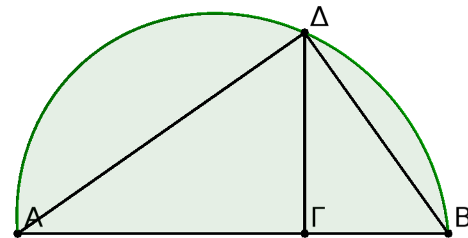
Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ **ΑΒ** καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ **Γ** ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν **ΑΓ** τῆς **ΓΒ**, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς **ΑΒ** ἡμικύκλιον τὸ **ΑΔΒ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Γ** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΓΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΒ**, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ **ΕΖΗΘ** ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ **ΔΒ**, καὶ ἀπὸ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ** τῷ τοῦ **ΕΖΗΘ** τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ **ΕΚ**, **ΖΛ**, **ΗΜ**, **ΘΝ**, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν **ΕΚ**, **ΖΛ**, **ΗΜ**, **ΘΝ** μιᾷ τῶν **ΕΖ**, **ΖΗ**, **ΗΘ**, **ΘΕ** ἴση ἑκάστη τῶν **ΕΚ**, **ΖΛ**, **ΗΜ**, **ΘΝ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΚΛ**, **ΛΜ**, **ΜΝ**, **ΝΚ**· κύβος ἄρα συνέσταται ὁ **ΖΝ** ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΚΗ**, **ΕΗ**. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΚΕΗ** γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν **ΚΕ** ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ **ΕΗ** ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν **ΕΗ** εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς **ΚΗ** γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ **Ε** σημείου.



πάλιν, ἐπεὶ ἡ **ΗΖ** ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν **ΖΛ**, **ΖΕ**, καὶ πρὸς τὸ **ΖΚ** ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ **ΗΖ**· ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν **ΖΚ**, ἡ **ΗΖ** ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν **ΖΚ**· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς **ΗΚ** γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ **Ζ**.



ὁμοίως καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς **ΚΗ** περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ.

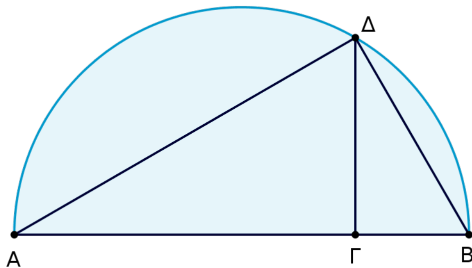
ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ **ΗΖ** τῇ **ΖΕ**, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ **Ζ** γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΗ** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΖ**. ἴση δὲ ἡ **ΕΖ** τῇ **ΕΚ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΕΗ** διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΚ**· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν **ΗΕ**, **ΕΚ**, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΗΚ**, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΕΚ**.

καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΓ**, ὡς δὲ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΗΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΕ** τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση ἡ **ΚΕ** τῇ **ΔΒ**· ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΚΗ** τῇ **ΑΒ**. καί ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ **ΚΗ** ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛʹ.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.



Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ **ΑΒ** καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ **Γ** ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν **ΑΓ** τῆς **ΓΒ**, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς **ΑΒ** ἡμικύκλιον τὸ **ΑΔΒ**, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ **Γ** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ **ΓΔ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΔΒ**, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ **ΕΖΗΘΚ**, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ **ΔΒ**, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν **ΕΖΗΘΚ** κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ **ΕΖΗΘΚ**, καὶ τετμήσθωσαν αἱ **ΕΖ**, **ΖΗ**, **ΗΘ**, **ΘΚ**, **ΚΕ** περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ **Λ**, **Μ**, **Ν**, **Ξ**, **Ο** σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΛΜ**, **ΜΝ**, **ΝΞ**, **ΞΟ**, **ΟΛ**, **ΕΟ**.

ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ **ΛΜΝΞΟ** πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ **ΕΟ** εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν **Ε**, **Ζ**, **Η**, **Θ**, **Κ** σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ **ΕΠ**, **ΖΡ**, **ΗΣ**, **ΘΤ**, **ΚΥ** ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ **ΕΖΗΘΚ** κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΠΡ**, **ΡΣ**, **ΣΤ**, **ΤΥ**, **ΥΠ**, **ΠΛ**, **ΛΡ**, **ΡΜ**, **ΜΣ**, **ΣΝ**, **ΝΤ**, **ΤΞ**, **ΞΥ**, **ΥΟ**, **ΟΠ**.

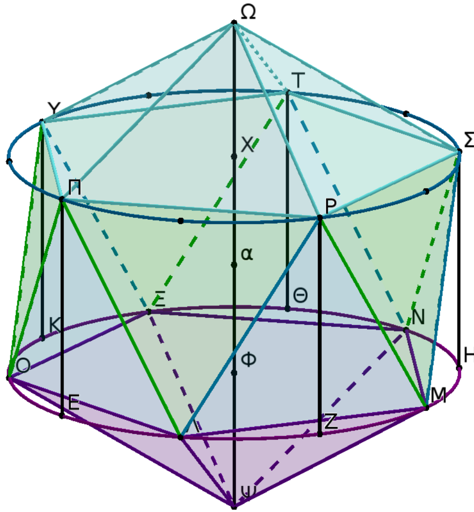
καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν **ΕΠ**, **ΚΥ** τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΕΠ** τῇ **ΚΥ**. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἡ **ΠΥ** ἄρα τῇ **ΕΚ** ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ **ΕΚ**· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ **ΠΥ** τοῦ εἰς τὸν **ΕΖΗΘΚ** κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν **ΠΡ**, **ΡΣ**, **ΣΤ**, **ΤΥ** πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν **ΕΖΗΘΚ** κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ **ΠΡΣΤΥ** πεντάγωνον.

καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ **ΠΕ**, δεκαγώνου δὲ ἡ **ΕΟ**, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΠΕΟ**, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ **ΠΟ**· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΟΥ** πενταγώνου ἐστὶ πλευρά. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΠΥ** πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΠΟΥ** τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν **ΠΛΡ**, **ΡΜΣ**, **ΣΝΤ**, **ΤΞΥ** ἰσόπλευρόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν **ΠΛ**, **ΠΟ**, ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΛΟ** πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΠΛΟ** τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν **ΛΡΜ**, **ΜΣΝ**, **ΝΤΞ**, **ΞΥΟ** τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν.

εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ **ΕΖΗ ΘΚ** κύκλου τὸ **Φ** σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ **Φ** τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ **ΦΩ**, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ **ΦΨ**, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ **ΦΧ**, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν **ΦΨ**, **ΧΩ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΠΩ**, **ΠΧ**, **ΥΩ**, **ΕΦ**, **ΛΦ**, **ΛΨ**, **ΨΜ**.

καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν **ΦΧ**, **ΠΕ** τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ **ΦΧ** τῇ **ΠΕ**. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ **ΕΦ**, **ΠΧ** ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ **ΕΦ**· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ **ΠΧ**. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ **ΠΧ**, δεκαγώνου δὲ ἡ **ΧΩ**, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΠΧΩ** γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ **ΠΩ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ **ΥΩ** πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς **ΦΚ**, **ΧΥ**, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καί ἐστιν ἡ **ΦΚ** ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου· ἑξαγώνου

ἄρα καὶ ἡ **ΧΥ**. δεκαγώνου δὲ ἡ **ΧΩ**, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ **ΥΧΩ**· πενταγώνου ἄρα ἡ **ΥΩ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΠΥ** πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΠΥΩ** τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ **ΠΡ**, **ΡΣ**, **ΣΤ**, **ΤΥ** εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ **Ω** σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν.



πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ **ΦΛ**, δεκαγώνου δὲ ἡ **ΦΨ**, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ **ΛΦΨ** γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ **ΛΨ**. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν **ΜΦ** οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ **ΜΨ** πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΛΜ** πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΛΜΨ** τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ **ΜΝ**, **ΝΞ**, **ΞΟ**, **ΟΛ**, κορυφὴ δὲ τὸ **Ψ** σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ **ΦΧ**, δεκαγώνου δὲ ἡ **ΧΩ**, ἡ **ΦΩ** ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμηται κατὰ τὸ **Χ**, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ **ΦΧ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΩΦ** πρὸς τὴν **ΦΧ**, οὕτως ἡ **ΦΧ** πρὸς τὴν **ΧΩ**. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΦΧ** τῇ **ΦΕ**, ἡ δὲ **ΧΩ** τῇ **ΦΨ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΩΦ** πρὸς τὴν **ΦΕ**, οὕτως ἡ **ΕΦ** πρὸς τὴν **ΦΨ**.

καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ **ΩΦΕ**, **ΕΦΨ** γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν **ΕΩ** εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ **ΨΕΩ** γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν **ΨΕΩ**, **ΦΕΩ** τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΩΦ** πρὸς τὴν **ΦΧ**, οὕτως ἡ **ΦΧ** πρὸς τὴν **ΧΩ**, ἴση δὲ ἡ μὲν **ΩΦ** τῇ **ΨΧ**, ἡ δὲ **ΦΧ** τῇ **ΧΠ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΨΧ** πρὸς τὴν **ΧΠ**, οὕτως ἡ **ΠΧ** πρὸς τὴν **ΧΩ**. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν **ΠΨ**, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ **Π** γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς **ΨΩ** γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ **Π**. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς **ΨΩ** περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ **Π** καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον.

λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ **ΦΧ** δίχα κατὰ τὸ **α**. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ **ΦΩ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Χ**, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ **ΩΧ**, ἡ ἄρα **ΩΧ** προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν **Χα** πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **Ωα** τοῦ ἀπὸ τῆς **αΧ**. καί ἐστι τῆς μὲν **Ωα** διπλῆ ἡ **ΩΨ**, τῆς δὲ **αΧ** διπλῆ ἡ **ΦΧ**· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΩΨ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΧΦ**. καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν ἡ **ΑΓ** τῆς **ΓΒ**, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΓ**. ὡς δὲ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΩΨ** πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς **ΦΧ**. καί ἐστιν ἴση ἡ **ΔΒ** τῇ **ΦΧ**· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ **ΕΖΗΘΚ** κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ **ΑΒ** τῇ **ΨΩ**. καί ἐστιν ἡ **ΑΒ** ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ **ΨΩ** ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

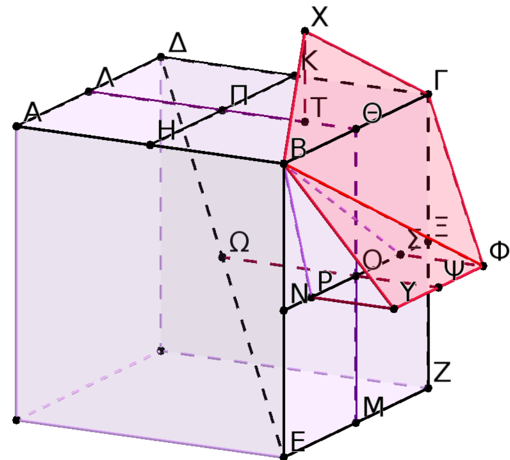
Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καί ἐστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ **ΕΖΗΘΚ** κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ **ΕΖΗΘΚ** κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ **ΕΖΗΘΚ** πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζʹ.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκκείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ **ΑΒΓΔ**, **ΓΒΕΖ**, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΔ**, **ΔΑ**, **ΕΖ**, **ΕΒ**, **ΖΓ** πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ **Η**, **Θ**, **Κ**, **Λ**, **Μ**, **Ν**, **Ξ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΗΚ**, **ΘΛ**, **ΜΘ**, **ΝΞ**, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν **ΝΟ**, **ΟΞ**, **ΘΠ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ **Ρ**, **Σ**, **Τ** σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ **ΡΟ**, **ΟΣ**, **ΤΠ**, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν **Ρ**, **Σ**, **Τ** σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ **ΡΥ**, **ΣΦ**, **ΤΧ**, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς **ΡΟ**, **ΟΣ**, **ΤΠ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΥΒ**, **ΒΧ**, **ΧΓ**, **ΓΦ**, **ΦΥ**. λέγω, ὅτι τὸ **ΥΒΧΓΦ** πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν.

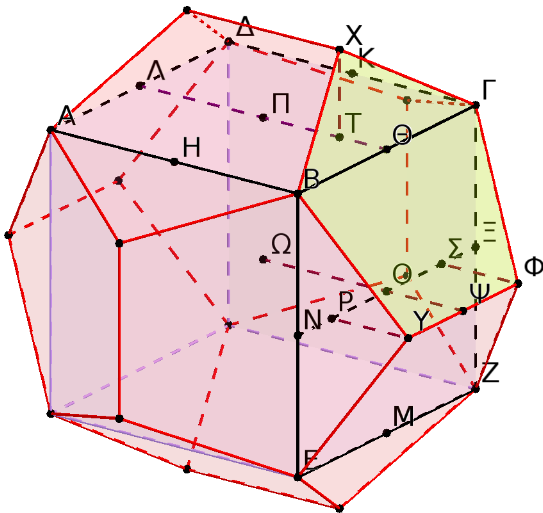


ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ **ΡΒ**, **ΣΒ**, **ΦΒ**. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ **ΝΟ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Ρ**, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΡΟ**, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΟΝ**, **ΝΡ** τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΡΟ**. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΟΝ** τῇ **ΝΒ**, ἡ δὲ **ΟΡ** τῇ **ΡΥ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΒΝ**, **ΝΡ** τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΡΥ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΒΝ**, **ΝΡ** τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΡ** ἐστιν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΒΡ** τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΡΥ**· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν **ΒΡ**, **ΡΥ** τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΡΥ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΒΡ**, **ΡΥ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΥ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΒΥ** τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΥΡ**· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΥ** τῆς **ΡΥ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΦΥ** τῆς **ΥΡ** διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ **ΣΡ** τῆς **ΟΡ**, τουτέστι τῆς **ΡΥ**, ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ **ΒΥ** τῇ **ΥΦ**. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν **ΒΧ**, **ΧΓ**, **ΓΦ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΒΥ**, **ΥΦ** ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΥΦΓΧ** πεντάγωνον.

λέγω δή, ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ **Ο** ἑκατέρᾳ τῶν **ΡΥ**, **ΣΦ** παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἡ **ΟΨ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΨΘ**, **ΘΧ**· λέγω, ὅτι ἡ **ΨΘΧ** εὐθεῖά ἐστιν.

ἐπεὶ γὰρ ἡ **ΘΠ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Τ**, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ **ΠΤ**, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΘΠ** πρὸς τὴν **ΠΤ**, οὕτως ἡ **ΠΤ** πρὸς τὴν **ΤΘ**. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΘΠ** τῇ **ΘΟ**, ἡ δὲ **ΠΤ** ἑκατέρᾳ τῶν **ΤΧ**, **ΟΨ**· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΘΟ** πρὸς τὴν **ΟΨ**, οὕτως ἡ **ΧΤ** πρὸς τὴν **ΤΘ**. καί ἐστι παράλληλος ἡ μὲν **ΘΟ** τῇ **ΤΧ**· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ **ΒΔ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ δὲ **ΤΘ** τῇ **ΟΨ**· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ **ΒΖ** ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ **ΨΟΘ**, **ΘΤΧ**, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶν ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ **ΨΘ** τῇ **ΘΧ**. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ **ΥΒΧΓΦ** πεντάγωνον.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ **ΝΟ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Ρ**, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΟΡ** [ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ **ΝΟ**, **ΟΡ** πρὸς τὴν **ΟΝ**, οὕτως ἡ **ΝΟ** πρὸς τὴν **ΟΡ**], ἴση δὲ ἡ **ΟΡ** τῇ **ΟΣ** [ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΣΝ** πρὸς τὴν **ΝΟ**, οὕτως ἡ **ΝΟ** πρὸς τὴν **ΟΣ**], ἡ **ΝΣ** ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Ο**, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΝΟ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΝΣ**, **ΣΟ** τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΝΟ**. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΝΟ** τῇ **ΝΒ**, ἡ δὲ **ΟΣ** τῇ **ΣΦ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΝΣ**, **ΣΦ** τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΝΒ**· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν **ΦΣ**, **ΣΝ**, **ΝΒ** τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΝΒ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΣΝ**, **ΝΒ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΣΒ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΒΣ**, **ΣΦ**, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΦ** [ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ **ΦΣΒ** γωνία], τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΝΒ**· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΦΒ** τῆς **ΒΝ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ **ΒΓ** τῆς **ΒΝ** διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΦ** τῇ **ΒΓ**. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ **ΒΥ**, **ΥΦ** δυσὶ ταῖς **ΒΧ**, **ΧΓ** ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ **ΒΦ** βάσει τῇ **ΒΓ** ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ **ΒΥΦ** γωνίᾳ τῇ ὑπὸ **ΒΧΓ** ἐστιν ἴση.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ **ΥΦΓ** γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ **ΒΧΓ**· αἱ ἄρα ὑπὸ **ΒΧΓ**, **ΒΥΦ**, **ΥΦΓ** τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται

τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ **ΒΥΦΓΧ** πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα **ΒΥΦΓΧ** πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καί ἐστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς **ΒΓ**. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ **ΨΟ**, καὶ ἔστω ἡ **ΨΩ**· συμβάλλει ἄρα ἡ **ΟΩ** τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ **Ω**· τὸ **Ω** ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ **ΩΟ** ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ **ΥΩ**.

καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ **ΝΣ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ **Ο**, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ **ΝΟ**, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΝΣ**, **ΣΟ** τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΝΟ**. ἴση δὲ ἡ μὲν **ΝΣ** τῇ **ΨΩ**, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν **ΝΟ** τῇ **ΟΩ** ἐστιν ἴση, ἡ δὲ **ΨΟ** τῇ **ΟΣ**. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ **ΟΣ** τῇ **ΨΥ**, ἐπεὶ καὶ τῇ **ΡΟ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΩΨ**, **ΨΥ** τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΝΟ**. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν **ΩΨ**, **ΨΥ** ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΥΩ**· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς **ΥΩ** τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΝΟ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ [ἡ] ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καί ἐστιν ἡ **ΝΟ** ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα **ΥΩ** ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καί ἐστι τὸ **Ω** κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ **Υ** ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δή, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς **ΝΟ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΡΟ**, τῆς δὲ **ΟΞ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΟΣ**, ὅλης ἄρα τῆς **ΝΞ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΡΣ**. οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ **ΝΟ** πρὸς τὴν **ΟΡ**, ἡ **ΟΡ** πρὸς τὴν **ΡΝ**, καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ **ΝΞ** πρὸς τὴν **ΡΣ**, οὕτως ἡ **ΡΣ** πρὸς συναμφότερον τὴν

ΝΡ, **ΣΞ**. μείζων δὲ ἡ **ΝΞ** τῆς **ΡΣ**· μείζων ἄρα καὶ ἡ **ΡΣ** συναμφοτέρου τῆς **ΝΡ**, **ΣΞ**· ἡ **ΝΞ** ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ **ΡΣ**. ἴση δὲ ἡ **ΡΣ** τῇ **ΥΦ**· τῆς ἄρα **ΝΞ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΥΦ**. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος καί ἐστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΝΞ** πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Ἡ **ΥΦ** ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Π ό ρ ι σ μ α : Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη′.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ **ΑΒ**, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ **Γ** ὥστε ἴσην εἶναι τὴν **ΑΓ** τῇ **ΓΒ**, κατὰ δὲ τὸ **Δ** ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν **ΑΔ** τῆς **ΔΒ**, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς **ΑΒ** ἡμικύκλιον τὸ **ΑΕΒ**, καὶ ἀπὸ τῶν **Γ**, **Δ** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ **ΓΕ**, **ΔΖ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΑΖ**, **ΖΒ**, **ΕΒ**.

καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΑΔ** τῆς **ΔΒ**, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΔ**. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ **ΒΑ** τῆς **ΑΔ**. ὡς δὲ ἡ **ΒΑ** πρὸς τὴν **ΑΔ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΖ**· ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ **ΑΖΒ** τρίγωνον τῷ **ΑΖΔ** τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΑ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΑΖ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. καί ἐστιν ἡ **ΑΒ** ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ **ΑΖ** ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ **ΑΔ** τῆς **ΔΒ**, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΔ**. ὡς δὲ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΔ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΖ**· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΖ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ **ΑΒ** ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ **ΒΖ** ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ **ΑΓ** τῇ **ΓΒ**, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΓ**. ὡς δὲ ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΓ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΕ**· διπλάσιον

ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΕ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. καί ἐστιν ἡ **ΑΒ** ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ **ΒΕ** ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ **Α** σημείου τῇ **ΑΒ** εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ **ΑΗ**, καὶ κείσθω ἡ **ΑΗ** ἴση τῇ **ΑΒ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΗΓ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Θ** ἐπὶ τὴν **ΑΒ** κάθετος ἤχθω ἡ **ΘΚ**.

καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΗΑ** τῆς **ΑΓ**· ἴση γὰρ ἡ **ΗΑ** τῇ **ΑΒ**· ὡς δὲ ἡ **ΗΑ** πρὸς τὴν **ΑΓ**, οὕτως ἡ **ΘΚ** πρὸς τὴν **ΚΓ**, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ **ΘΚ** τῆς **ΚΓ**. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΘΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΓ**· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν **ΘΚ**, **ΚΓ**, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΘΓ**, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΓ**. ἴση δὲ ἡ **ΘΓ** τῇ **ΓΒ**· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΚ**. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ **ΑΒ** τῆς **ΓΒ**, ὧν ἡ **ΑΔ** τῆς **ΔΒ** ἐστι διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ **ΒΔ** λοιπῆς τῆς **ΔΓ** ἐστι διπλῆ. τριπλῆ ἄρα ἡ **ΒΓ** τῆς **ΓΔ**· ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΔ**. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΚ**· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΓΚ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΔ**. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ **ΓΚ** τῆς **ΓΔ**.

κείσθω τῇ **ΓΚ** ἴση ἡ **ΓΛ**, καὶ ἀπὸ τοῦ **Λ** τῇ **ΑΒ** πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ **ΛΜ**, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ **ΜΒ**.

καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΓ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΓΚ**, καί ἐστι τῆς μὲν **ΒΓ** διπλῆ ἡ **ΑΒ**, τῆς δὲ **ΓΚ** διπλῆ ἡ **ΚΛ**, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΚΛ**. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καί ἐστιν ἡ **ΑΒ** ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ **ΚΛ** ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ **ΚΛ** ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου.

καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καί ἐστιν ἡ μὲν **ΑΒ** ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ **ΚΛ** ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ **ΑΚ** τῇ **ΛΒ**, ἑκατέρα ἄρα τῶν **ΑΚ**, **ΛΒ** δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ

ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ’ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ **ΛΒ**, ἑξαγώνου δὲ ἡ **ΜΛ**· ἴση γάρ ἐστι τῇ **ΚΛ**, ἐπεὶ καὶ τῇ **ΘΚ**· ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· καί ἐστιν ἑκατέρα τῶν **ΘΚ**, **ΚΛ** διπλασίων τῆς **ΚΓ**· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ **ΜΒ**. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ **ΜΒ**. Καὶ ἐπεὶ ἡ **ΖΒ** κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ **Ν**, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ **ΝΒ**· ἡ **ΝΒ** ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν **ΑΖ** πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς **ΒΕ** δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς **ΖΒ** δυνάμει τριπλασίων, οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο.

ἡ μὲν ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ **ΜΒ** τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς **ΝΒ**, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ **ΖΔΒ** τρίγωνον τῷ **ΖΑΒ** τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΖ**, οὕτως ἡ **ΒΖ** πρὸς τὴν **ΒΑ**. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ **ΔΒ** πρὸς τὴν **ΒΑ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΔΒ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΖ**· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ **ΑΒ** πρὸς τὴν **ΒΔ**, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΒ** πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**. τριπλῆ δὲ ἡ **ΑΒ** τῆς **ΒΔ**· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΖΒ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΒΔ**.

ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΔ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΔΒ** τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ **ΑΔ** τῆς **ΔΒ**· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς **ΑΔ** τοῦ ἀπὸ τῆς **ΖΒ**· μείζων ἄρα ἡ **ΑΔ** τῆς **ΖΒ**· πολλῷ ἄρα ἡ **ΑΛ** τῆς **ΖΒ** μείζων ἐστίν. καὶ τῆς μὲν **ΑΛ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΚΛ**, ἐπειδήπερ ἡ μὲν **ΛΚ** ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ **ΚΑ** δεκαγώνου· τῆς δὲ **ΖΒ** ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ **ΝΒ**· μείζων ἄρα ἡ **ΚΛ** τῆς **ΝΒ**. ἴση δὲ ἡ **ΚΛ** τῇ **ΛΜ**·μείζων ἄρα ἡ **ΛΜ** τῆς **ΝΒ** [τῆς δὲ **ΛΜ** μείζων ἐστὶν ἡ **ΜΒ**]. πολλῷ ἄρα ἡ **ΜΒ** πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς **ΝΒ** πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

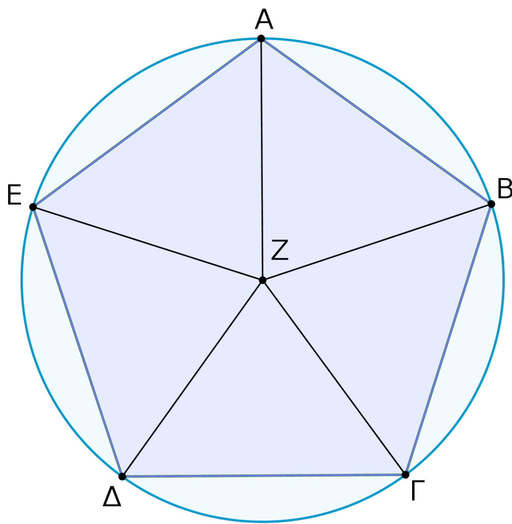
Λέγω δή, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον

σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων ἢ ὅλως ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅπερ ἀδύνατον· ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους· ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα: Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτου, οὕτω δεικτέον.



Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ **ΑΒΓΔΕ**, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ **ΑΒΓ ΔΕ**, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ **Ζ**, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ **ΖΑ**, **ΖΒ**, **ΖΓ**, **ΖΔ**, **ΖΕ**. δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε** τοῦ πενταγώνου γωνίας.

καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ **Ζ** πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καί εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ **ΑΖΒ**, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ **ΖΑΒ**, **ΑΒΖ** μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ **ΖΑΒ** τῇ ὑπὸ **ΖΒΓ**· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ **ΑΒΓ** τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ISBN 978-618-83039-3-5
ISBN 978-618-83039-4-2 (set)